REGIONE TOSCANA

Laboratori del Sapere Scientifico

Iniziativa realizzata con il contributo della Regione Toscana nell'ambito del progetto

Rete Scuole LSS

a.s. 2016/2017

Liceo Statale "C. Lorenzini"
Classico, Linguistico, Scientifico,Scienze umane
Pescia (PT)

contesti di realtà e modelli matematici

un percorso integrato alla scoperta delle proprietà e dell'efficacia delle diverse funzioni matematiche nello studio e nell'interpretazione di contesti vero-simili

(seconda parte)

a.s. 2016-2017

collocazione del percorso effettuato nel curricolo verticale

il percorso è stato svolto nelle classi terze del liceo scientifico, volto a fornire allo studente una visione complessiva delle principali funzioni matematiche come strumento di indagine del mondo «reale», quando gli studenti sono in grado di risolvere equazioni e disequazioni algebriche e di rappresentare nel piano cartesiano semplici funzioni

obiettivi essenziali di apprendimento

- conoscere le principali funzioni algebriche e trascendenti
- saper effettuare trasformazioni geometriche nel piano cartesiano
- determinare le equazioni di funzioni composte e dedurne il grafico noti i grafici delle funzioni elementari utilizzate
- modellizzare con una funzione opportuna un problema «reale»
- saper individuare tra più funzioni date quella che è adatta a modellizzare una particolare situazione «reale»
- avviare ad uno studio critico che stimoli i collegamenti tra le conoscenze acquisite e i fenomeni della realtà quotidiana

elementi salienti dell’approccio metodologico

a differenza del classico approccio, si propone un percorso innovativo che anticipa alla classe terza lo studio delle principali funzioni matematiche anche contestualizzandole in ambito «reale»; gli elementi sono:

- rappresentare graficamente funzioni di complessità gradualmente crescente anche con l’utilizzo di supporti informatici
- stimolare gli studenti ad analizzare e discutere criticamente i grafici ottenuti al fine di riconoscerne le principali caratteristiche
- interpretare consapevolmente le caratteristiche individuate quando la funzione rappresenta un modello di una situazione concreta

tutto ciò permette agli studenti, attraverso la correzione degli elaborati e le continue discussioni in classe, di appropriarsi degli strumenti di indagine della «realtà» e di imparare a utilizzare i concetti acquisiti in situazioni nuove

materiali, apparecchi e strumenti utilizzati

- internet (per ricercare contesti applicativi di «nuove» funzioni)
- software per costruire grafici (geogebra)

ambienti di lavoro in cui è stato sviluppato il percorso

- laboratorio multimediale
- aula scolastica
- a casa

tempi impiegati

- per la messa a punto preliminare nel gruppo LSS: 16 h (prima e seconda parte)
- la progettazione specifica nella classe, lo sviluppo del percorso a scuola, la documentazione, la strutturazione del percorso e la verifica dei risultati hanno impegnato buona parte delle ore assegnate alla disciplina nell’anno scolastico 2016/2017

altre informazioni

- il percorso si sviluppa attraverso un raccordo continuo tra le varie discipline scientifiche e i diversi contesti «reali» con lo scopo di:
  - contestualizzare le varie funzioni in situazioni concrete diverse
  - economizzare i tempi di lavoro
- sono state evidenziate in rosso le parti che sintetizzano i contenuti degli interventi degli studenti
- di seguito viene indicato l'intero lavoro affrontato in classe di cui, a causa della notevole quantità di materiale, viene presentata la seconda parte

descrizione sintetica dell'attività

il "percorso" proposto ha occupato quasi tutto l'anno scolastico e, con un approccio che coinvolgesse direttamente gli studenti e stimolasse continuamente un'analisi critica dei problemi proposti (anche con l'uso di software come geogebra), sono state introdotte nell'ordine:

- funzioni potenza $y = x^n$ e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- funzioni reciproche $y = \frac{1}{f(x)}$ e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- funzioni irrazionali $y = \sqrt{f(x)}$ e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- luoghi geometrici nel piano cartesiano sia in forma parametrica che in forma cartesiana e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- equazione delle quattro coniche nel piano cartesiano e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- funzione inversa $y = f^{-1}(x)$ di una funzione e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- funzione esponenziale e funzione logaritmo e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- funzioni goniometriche e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- funzioni composte e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni

descrizione sintetica dell'attività

al termine del "percorso" gli studenti dovrebbero essere in grado di:

- tracciare il grafico probabile di una funzione algebrica e trascendente senza utilizzare gli strumenti propri dell'analisi matematica
- analizzare le principali caratteristiche della funzione deducendole dal suo grafico
- utilizzare i grafici ottenuti per risolvere equazioni e disequazioni di vario tipo
- riconoscere, tra più funzioni fornite, quella in grado di rappresentare al meglio una data situazione concreta
- costruire (e non scegliere) una funzione in grado di rappresentare una data situazione concreta

descrizione sintetica dell'attività

in questo percorso viene presentata la seconda parte del lavoro relativa:

- allo studio di:
  - luoghi geometrici nel piano cartesiano sia in forma parametrica che in forma cartesiana e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
  - equazione delle quattro coniche nel piano cartesiano e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
  - funzione inversa $y = f^{-1}(x)$ di una funzione e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
  - funzione esponenziale e funzione logaritmica e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
  - funzioni goniometriche e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
  - funzioni composte e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni

- alla loro applicazione:
  - in contesti reali
  - alla risoluzione del primo problema della simulazione della seconda prova di matematica per l'esame di stato del MIUR del 29 aprile 2016
  - alla risoluzione del secondo problema (modificato) della simulazione della seconda prova di matematica per l'esame di stato del MIUR del 22 aprile 2015

argomenti proposti e discussi in classe

nella lezione introduttiva sono stati presentati alcuni esempi di luoghi geometrici: l’asse di un segmento, la circonferenza e le bisettrici degli angoli formati da due rette (definizioni solitamente già note agli studenti)

gli studenti sono stati invitati:

- a rappresentare graficamente l’asse di un dato segmento, la circonferenza noti il centro e il raggio e le bisettrici date le equazioni di due rette
- a osservare le loro principali caratteristiche
- a scrivere la condizione di appartenenza di un punto generico al luogo geometrico

argomenti proposti e discussi in classe

l'insegnante:

- date le coordinate di un punto P(x(k),y(k)) dipendenti dal parametro k, ha introdotto le equazioni parametriche del luogo

$$\begin{cases} x = x(k) \\ y = y(k) \end{cases}$$

e ha invitato gli studenti a ricavare l'equazione cartesiana eliminando k

*


ES. 501-504 pag. 236

501. $P\left(\frac{k-4}{3}, 2|k|+8\right)$

$\begin{cases} x = \frac{k-4}{3} \rightarrow k = 3x+4 \\ y = 2|k|+8 \rightarrow y = 2|3x+4|+8 \end{cases}$

504. $P\left(\frac{2k-1}{k} ; \frac{k+3}{k}\right)$

$\begin{cases} x = \frac{2k-1}{k} \rightarrow kx = 2k-1,\ kx-2k=-1,\ \frac{k(x-2)}{x-2} = \frac{-1}{x-2} \rightarrow k = -\frac{1}{x-2} \\ y = \frac{k+3}{k} \end{cases}$

$y = \frac{-\frac{1}{x-2}+3}{-\frac{1}{x-2}} = \frac{\frac{-1+3(x-2)}{x-2}}{-\frac{1}{x-2}} = \frac{3x-7}{x-2}\left(-\frac{x-2}{1}\right) = -3x+7$

$y = -3x+7 \quad x \neq 2$

---

*Bergamini, Trifone, Barozzi «Matematica.blu 2,0» Seconda edizione, Vol. 3 Ed. Zanichelli, esercizi n. 501-504 pag. 236

argomenti proposti e discussi in classe

- ha proposto un problema risolvibile con le equazioni parametriche tratto dal libro di testo in uso nella classe:

*

Qual è la traiettoria?
La torretta di un pantografo da incisione scorre con velocità costante V_x =3 cm/s lungo il braccio trasportatore, che a sua volta si muove con velocità V_y=2 cm/s. La punta si trova nella posizione A(18 cm; 125 cm).

- Determina l'equazione della traiettoria descritta dalla punta ed esegui il disegno nel piano cartesiano.
- Quanto è lunga l'incisione tracciata in 40 s?

*Bergamini, Trifone, Barozzi «Matematica.blu 2,0» Seconda edizione, Vol. 3 Ed. Zanichelli, esercizi n. 509 pag. 237

argomenti proposti e discussi in classe

l'insegnante:

- ha affrontato contemporaneamente in fisica la composizione dei movimenti e la descrizione del moto relativo a sistemi di riferimento diversi

gli studenti:

- hanno utilizzato le equazioni parametriche per ricavare l'equazione cartesiana del moto
- sono stati invitati a riflettere sul significato del parametro tempo
- sono stati invitati a riflettere sulle limitazioni del parametro k e di conseguenza sulle variabili x e y

argomenti proposti e discussi in classe

In attesa sul molo

Francesca è su un traghetto che si sta muovendo lungo il molo di un porto, alla velocità di 5,0 m/s, verso Paolo che si trova nel punto dove attraccherà il traghetto. Francesca si muove perpendicolarmente al traghetto, con una velocità di 1,0 m/s e, in un certo istante, che si può considerare come istante iniziale, si trova a 15 m di distanza dal bordo del traghetto, come indicato in figura.

a) Assumendo la posizione di Francesca come origine, scrivi l'equazione del moto di Paolo dal punto di vista di Francesca.

b) Assumendo poi la posizione di Paolo come origine, scrivi l'equazione del moto di Francesca dal punto di vista di Paolo.

In entrambi i casi considera come verso positivo degli assi quello del sistema di riferimento indicato in figura per Francesca.

argomenti proposti e discussi in classe

l’insegnante:

- ha definito le coniche come sezioni di un cono a due falde
- ha definito come luogo geometrico dei punti del piano:
  - la parabola
  - la circonferenza
  - l'ellisse
  - l'iperbole

gli studenti sono stati guidati dall’insegnante a determinare l’equazione delle curve utilizzando la definizione

argomenti proposti e discussi in classe

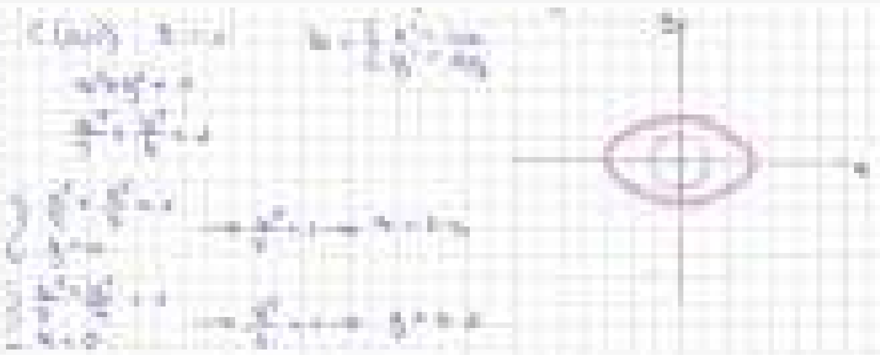
gli studenti hanno applicato le trasformazioni geometriche alle coniche:

- la dilatazione/contrazione a una circonferenza e hanno ottenuto un’ellisse
- la simmetria assiale rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante hanno ottenuto:
  - la parabola con asse di simmetria parallelo all’asse x
  - l'ellisse e l’iperbole con i fuochi sull’asse y
- la traslazione all’ellisse e all’iperbole

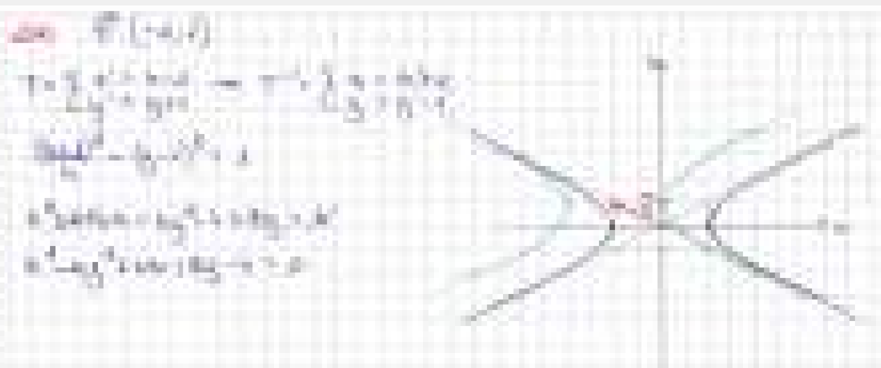
gli studenti hanno tracciato il grafico delle coniche sottoposte a trasformazioni

argomenti proposti e discussi in classe

esempi di esercizi svolti dagli studenti



*

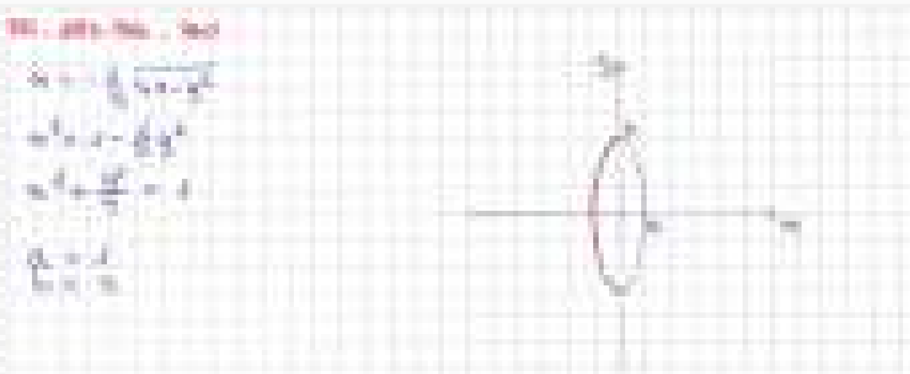


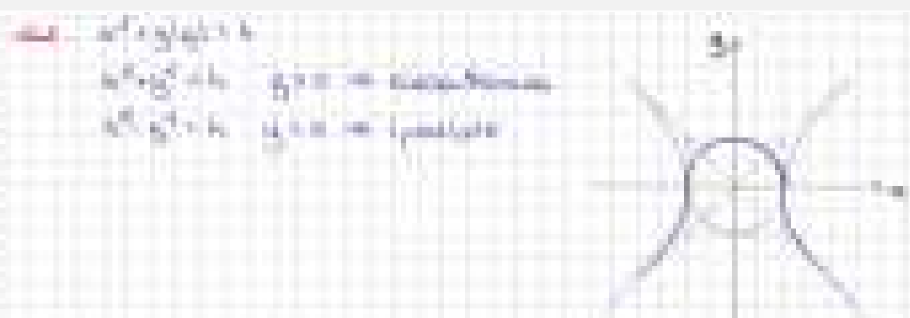
*Bergamini, Trifone, Barozzi «Matematica.blu 2,0» Seconda edizione, Vol. 3 Ed. Zanichelli, esercizi n. 210 pag. 501

argomenti proposti e discussi in classe

argomenti proposti e discussi in classe

esempi di esercizi svolti dagli studenti: grafici di particolari funzioni *



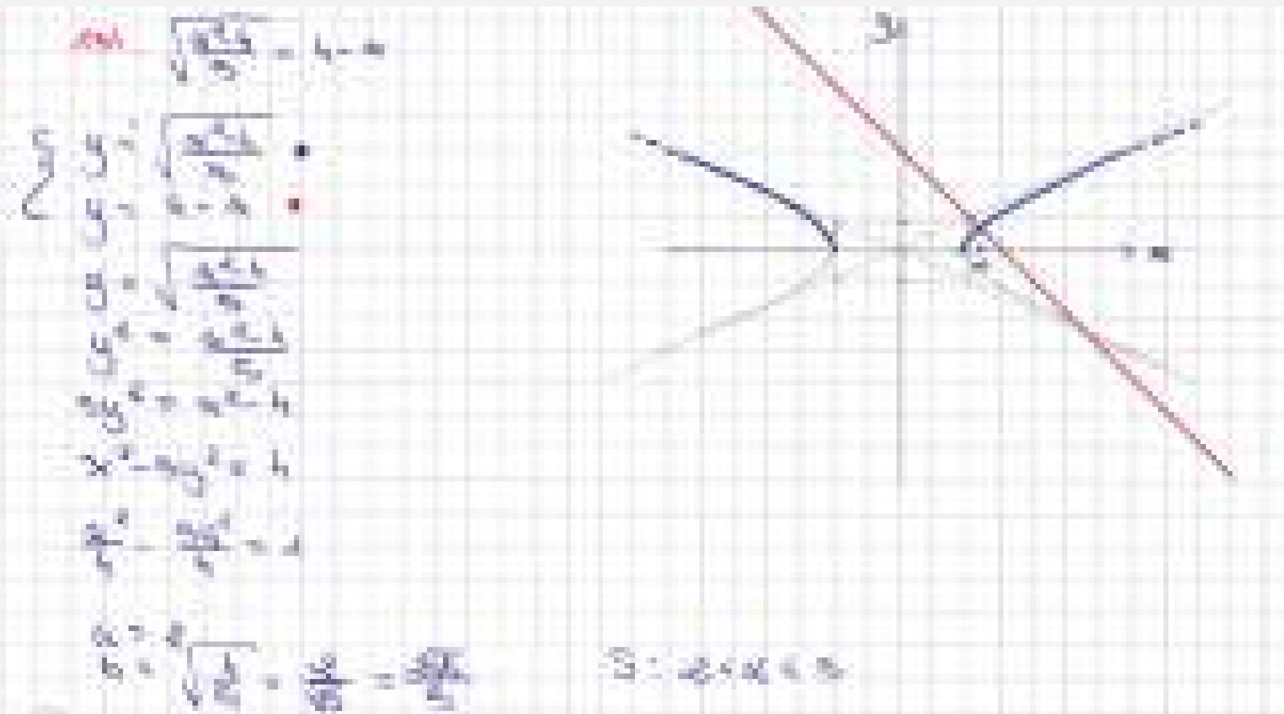


*Bergamini, Trifone, Barozzi «Matematica.blu 2,0» Seconda edizione, Vol. 3 Ed. Zanichelli, esercizi n. 273 pag. 450; n. 102 pag. 491

argomenti proposti e discussi in classe

esempi di esercizi svolti dagli studenti:
risoluzione grafica di equazioni irrazionali

*

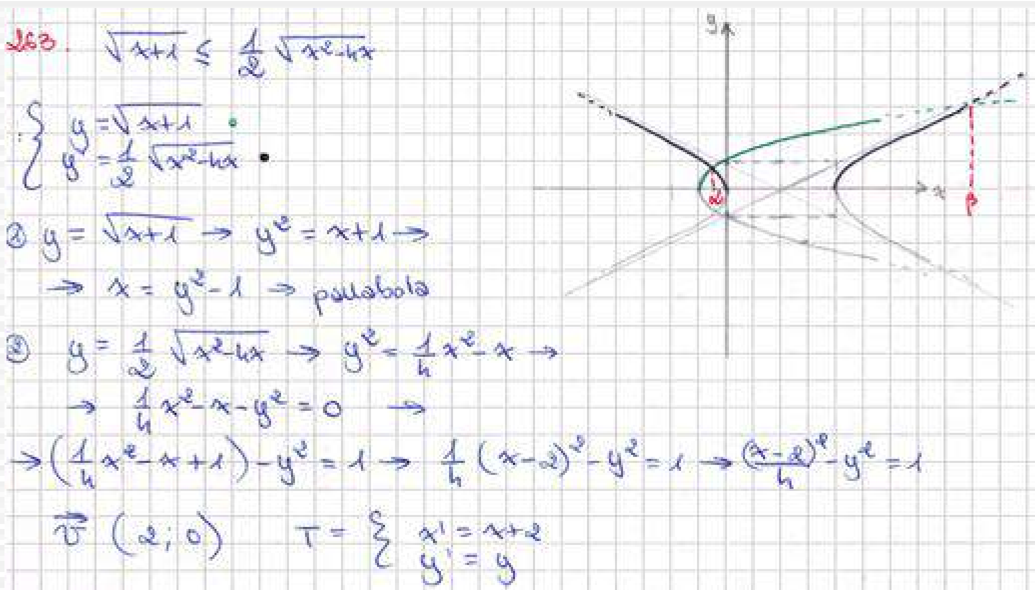


*Bergamini, Trifone, Barozzi «Matematica.blu 2,0» Seconda edizione, Vol. 3 Ed. Zanichelli, esercizi n. 134 pag. 494

argomenti proposti e discussi in classe

esempi di esercizi svolti dagli studenti:
risoluzione grafica di disequazioni irrazionali

*



*Bergamini, Trifone, Barozzi «Matematica.blu 2,0» Seconda edizione, Vol. 3 Ed. Zanichelli, esercizi n. 263 pag. 505

argomenti proposti e discussi in classe

esempi di esercizi svolti dagli studenti:
risoluzione grafica e analitica di equazioni irrazionali:

*

*Bergamini, Trifone, Barozzi «Matematica.blu 2,0» Seconda edizione, Vol. 3 Ed. Zanichelli, esercizi n. 262 pag. 505

argomenti proposti e discussi in classe

l'insegnante:

- ha definito la funzione inversa

gli studenti sono stati invitati:

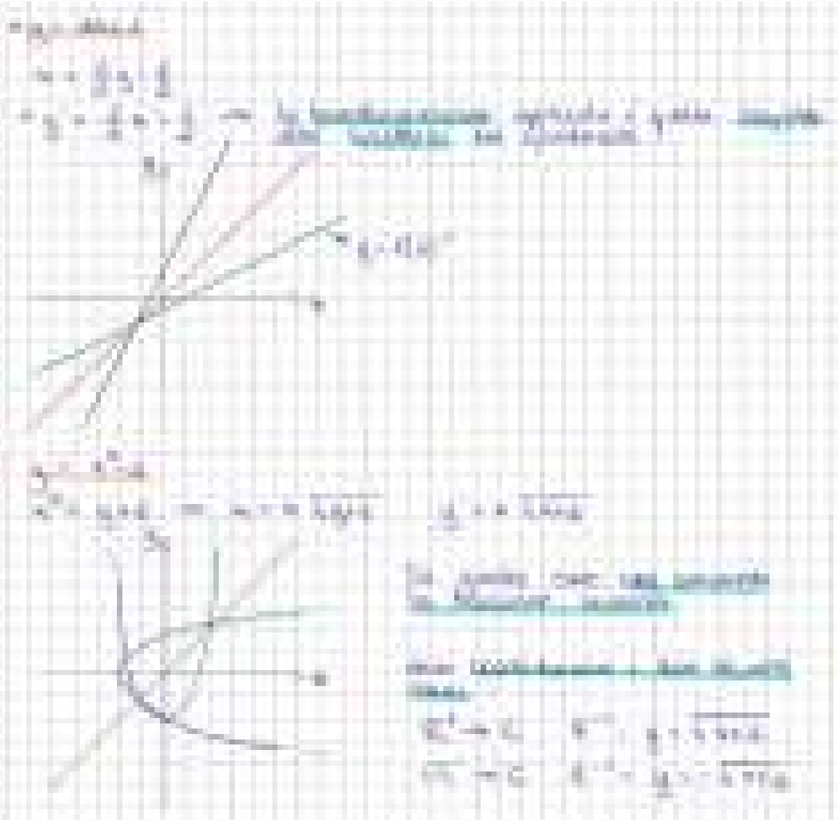
- a ricavare l'equazione inversa di una data funzione
- a fare il grafico di una funzione e della sua inversa
- a individuare, guidati dall'insegnante, le condizioni di invertibilità di una funzione
- a osservare la relazione tra dominio e codominio della funzione e della sua inversa

alcuni studenti hanno osservato che:

- i grafici della funzione e della sua inversa sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante

argomenti proposti e discussi in classe

esempio di esercizio svolto dagli studenti

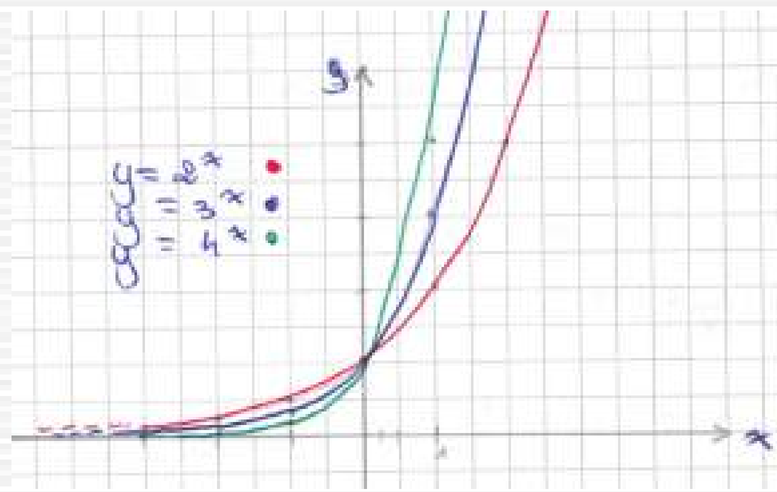


argomenti proposti e discussi in classe

a partire da un problema relativo alla crescita di una popolazione batterica è stata introdotta la funzione esponenziale

gli studenti sono stati invitati:

- a rappresentare graficamente alcune funzioni esponenziali di equazione $y = a^x$ con $a>1$
- a osservare le loro principali caratteristiche



alcuni studenti hanno osservato che le curve:

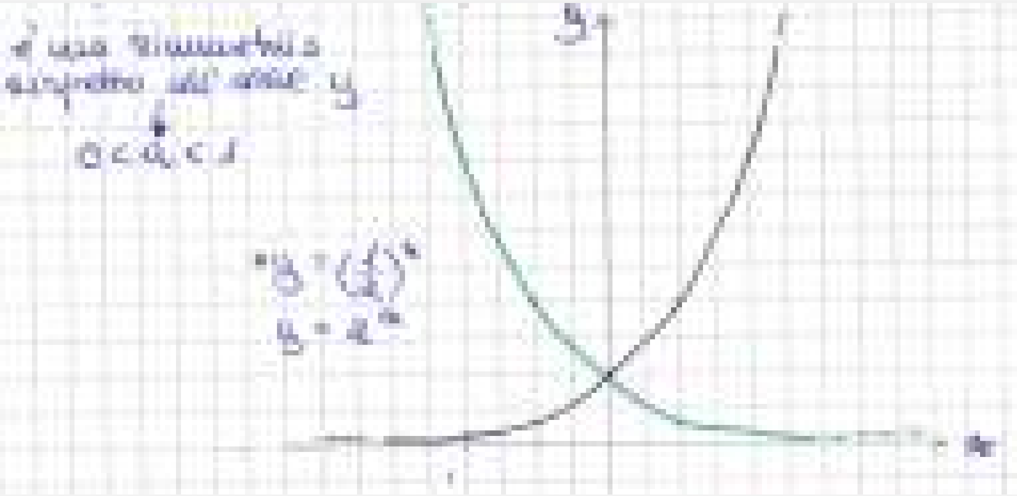
- passano tutte per il punto (0;1)
- sono tutte crescenti
- hanno l'asse x come asintoto
- crescono «più rapidamente» all'aumentare della base «a»

argomenti proposti e discussi in classe

gli studenti sono stati invitati:

- a rappresentare graficamente le funzioni

  $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



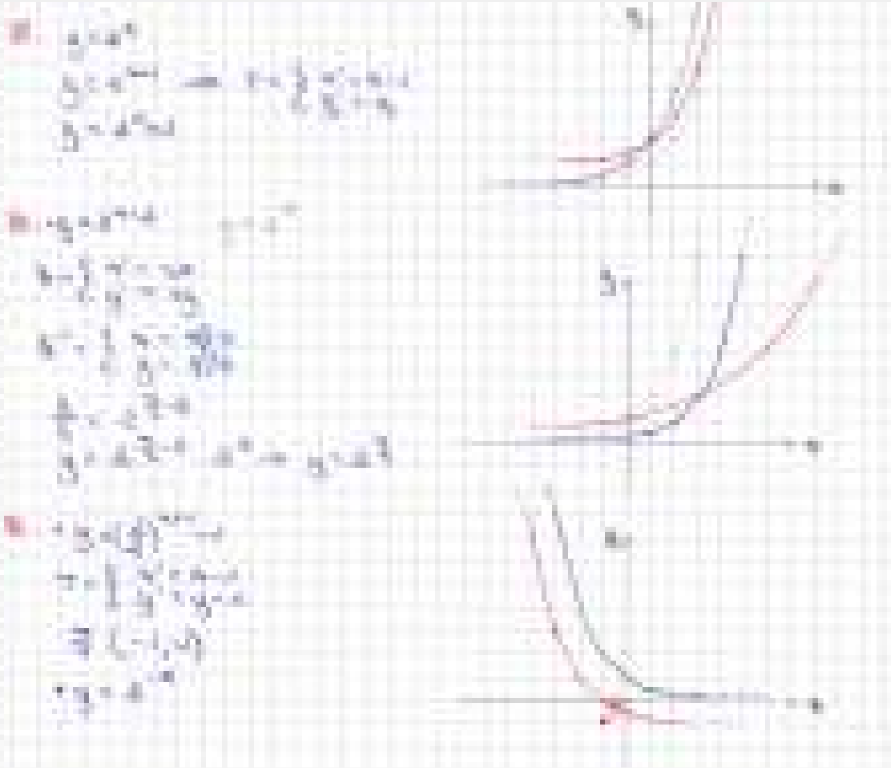
alcuni studenti hanno osservato che:

- le curve si corrispondono in una simmetria assiale rispetto all'asse y
- l'equazione della seconda funzione può essere scritta come $y = 2^{-x}$

argomenti proposti e discussi in classe

gli studenti hanno applicato le trasformazioni geometriche alla funzione esponenziale:

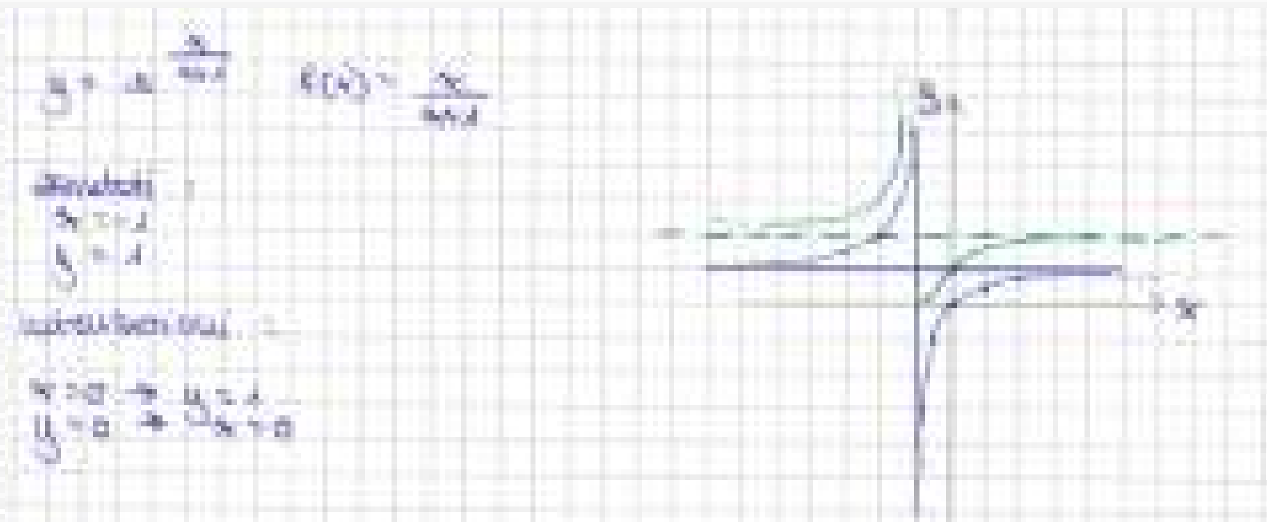
*



*Bergamini, Trifone, Barozzi «Matematica.blu 2,0» Seconda edizione, Vol. 3 Ed. Zanichelli, esercizi n. 87 pag. 586, n. 89-96 pag. 587

argomenti proposti e discussi in classe

gli studenti hanno tracciato il grafico del tipo $y=a^{f(x)}$



argomenti proposti e discussi in laboratorio multimediale

l'insegnante:

- ha definito il logaritmo e la funzione logaritmica

gli studenti sono stati invitati:

- a ricavare il grafico della funzione logaritmica come funzione inversa della funzione esponenziale
- a rappresentare graficamente funzioni logaritmiche con diversa base «a» con geogebra
- a osservare le principali caratteristiche

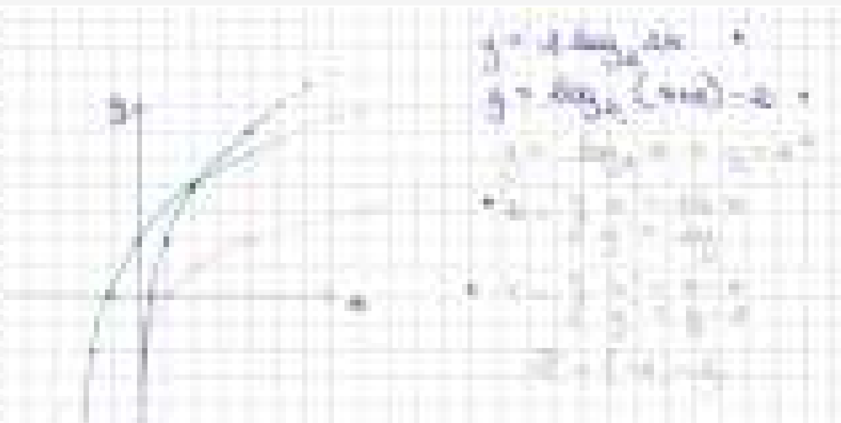
argomenti proposti e discussi in classe

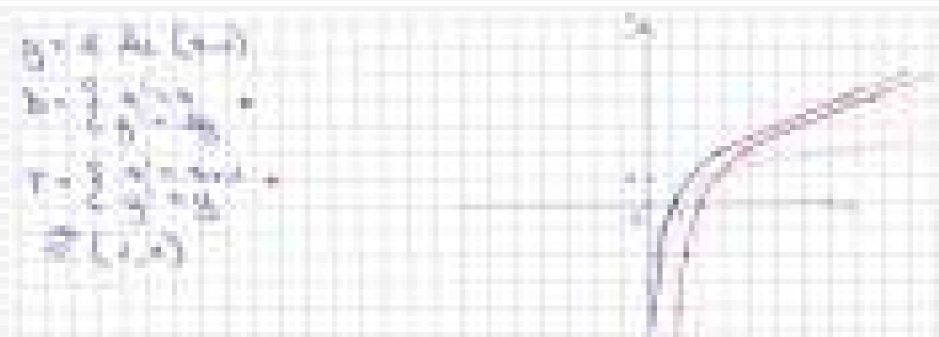
alcuni studenti hanno osservato che le funzioni logaritmiche :

- hanno come dominio $x>0$
- passano tutte per il punto $(1;0)$
- hanno l'asse y come asintoto
- crescono «meno rapidamente» della funzione esponenziale

argomenti proposti e discussi in classe

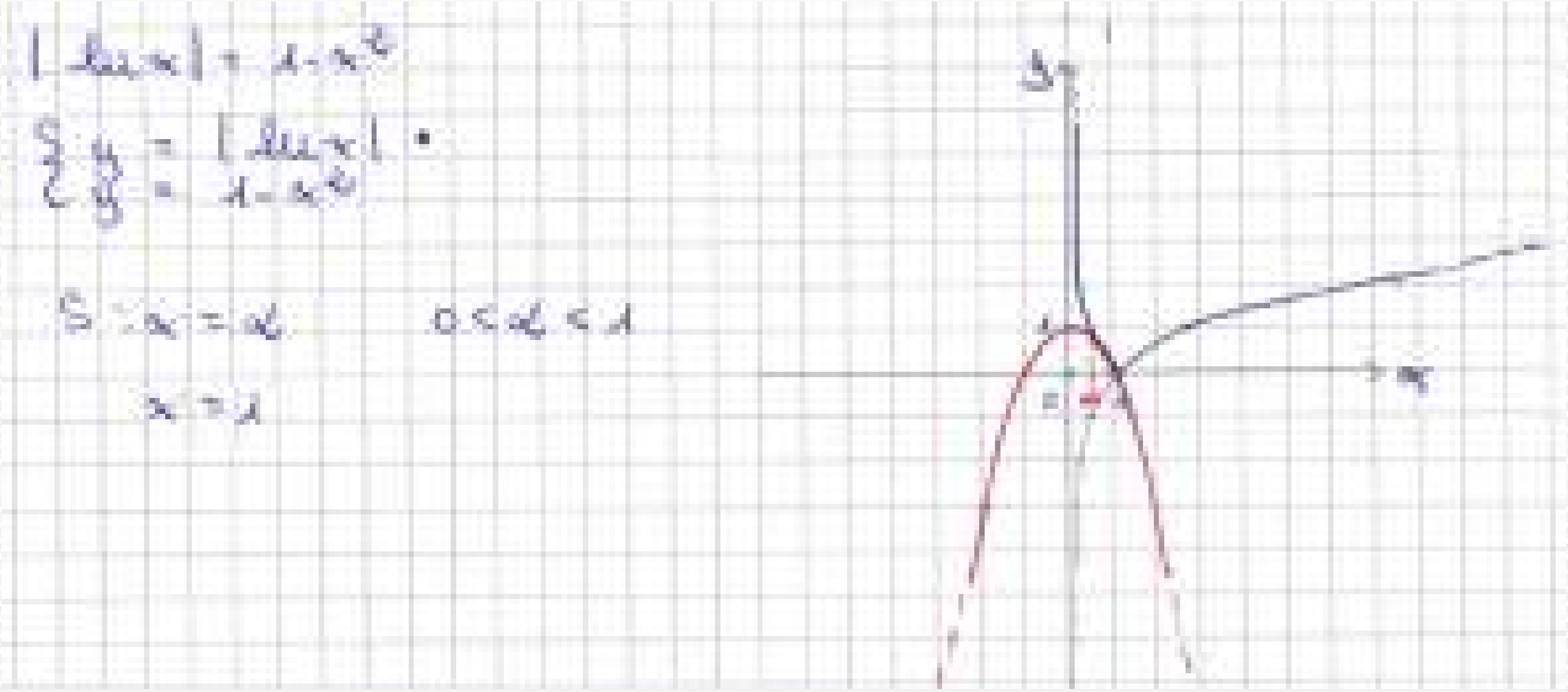
gli studenti hanno tracciato il grafico di funzioni logaritmiche sottoposte a trasformazioni





argomenti proposti e discussi in classe

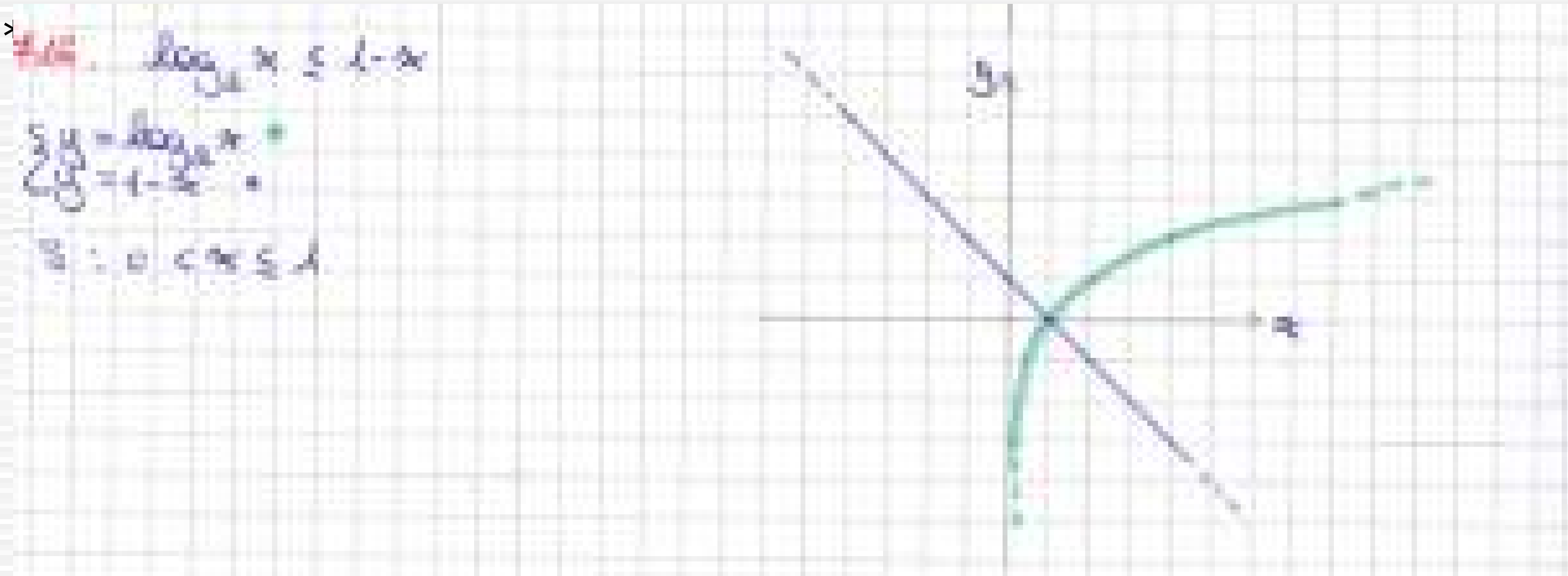
esempi di esercizi svolti dagli studenti:
risoluzione grafica di un’equazione logaritmica



argomenti proposti e discussi in classe

esempi di esercizi svolti dagli studenti:
risoluzione grafica di una disequazione logaritmica

*



*Bergamini, Trifone, Barozzi «Matematica.blu 2,0» Seconda edizione, Vol. 3 Ed. Zanichelli, esercizi n. 716 pag. 652

argomenti proposti e discussi in classe

gli studenti sono stati invitati a tracciare e confrontare il grafico delle coppie di funzioni:

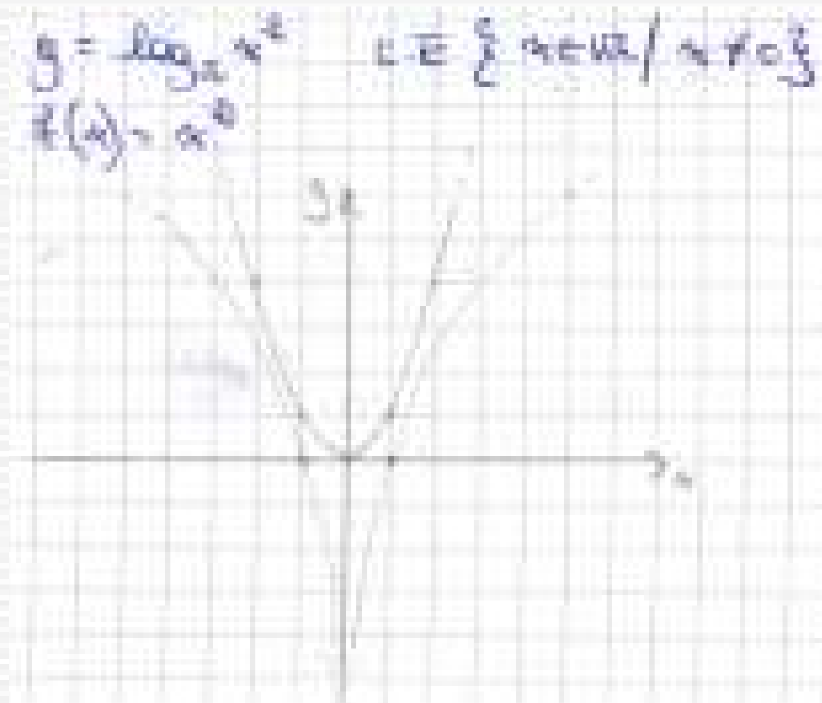
$y = \log x^2 \qquad y = 2\log x$

e con geogebra i grafici delle coppie di funzioni:

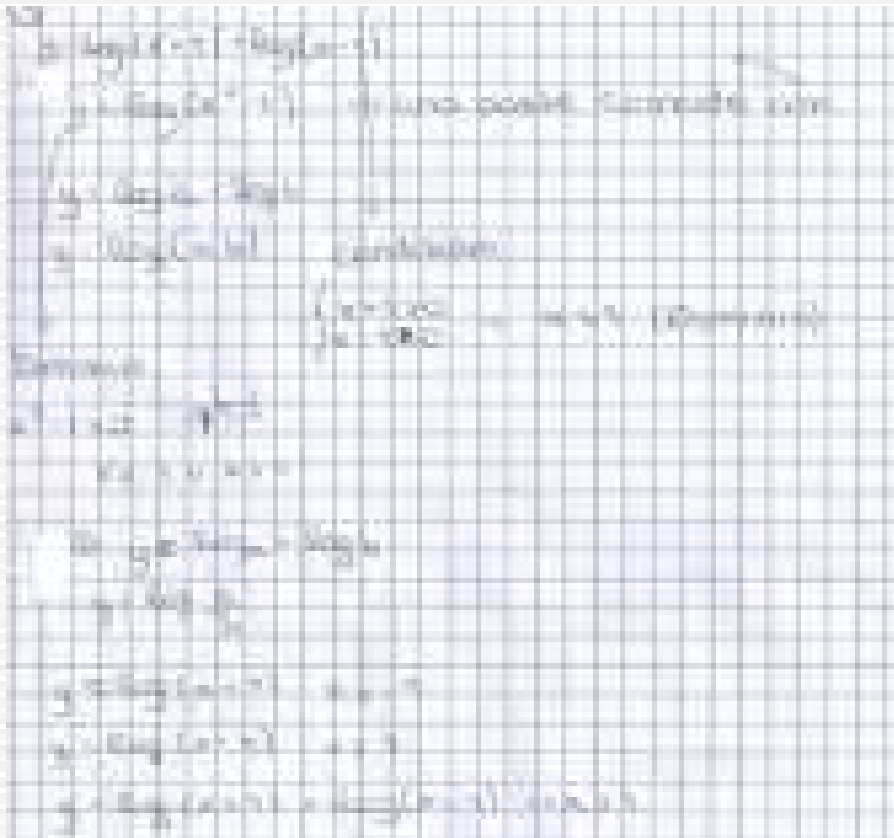
$y = \log(x+1) + \log(x-1) \qquad y = \log(x^2 - 1)$

$y = \log(x+1) - \log(x-1) \qquad y = \log \dfrac{x+1}{x-1}$

argomenti proposti e discussi in classe



argomenti proposti e discussi in classe



argomenti proposti e discussi in classe

alcuni studenti hanno osservato che:

- i grafici delle coppie di funzioni coincidono solo in parte
- le funzioni hanno diverso dominio
- i grafici delle coppie di funzioni coincidono nel dominio comune

l’insegnante ha introdotto le proprietà dei logaritmi

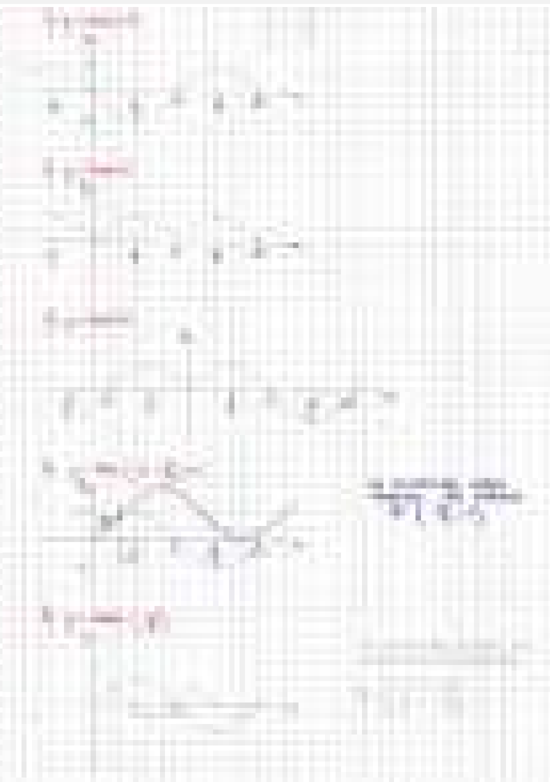
argomenti proposti e discussi in classe

l'insegnante:

- ha richiamato le definizioni delle funzioni seno, coseno e tangente di un angolo riferite al triangolo rettangolo, già note agli studenti
- ha invitato gli studenti a determinare il valore che esse assumono per gli angoli di 30°, 60° e 45°, facendo riferimento al triangolo equilatero e al quadrato
- ha introdotto la circonferenza goniometrica e definito le funzioni y= sen*x* e y=cosx
- ha invitato gli studenti
  - a determinare il valore del seno e del coseno di angoli particolari: 0°, 90°, 180°, 270°, 360° e di 120°, 135°, 150°, … che si possono ottenere per simmetrie assiali rispetto all'asse x e all'asse y, e per simmetria centrale rispetto all'origine, del punto P sulla circonferenza goniometrica che individua l'angolo
  - a disegnare il grafico delle funzioni y= sen*x* e y=cosx

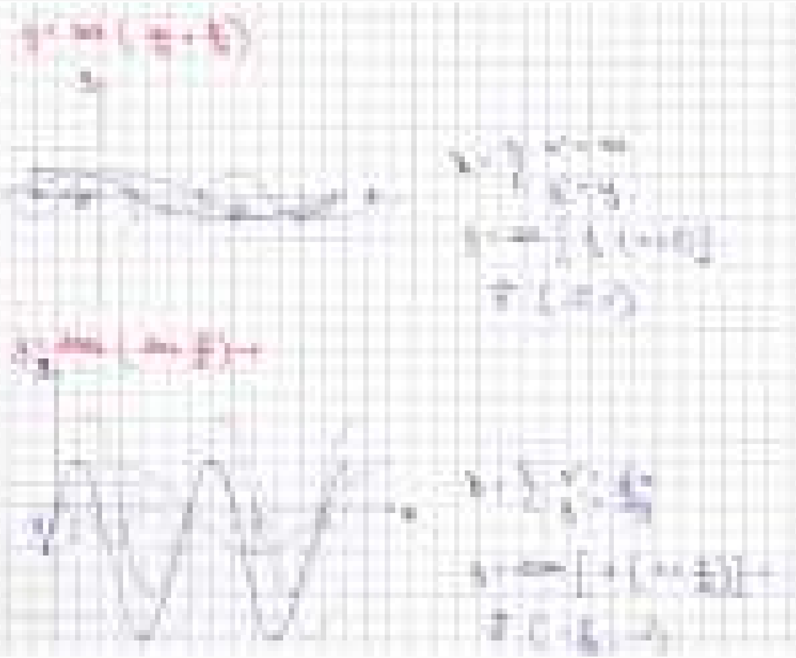
argomenti proposti e discussi in classe

gli studenti hanno tracciato il grafico di funzioni goniometriche sottoposte a trasformazioni



argomenti proposti e discussi in classe

gli studenti hanno tracciato il grafico di funzioni goniometriche sottoposte a trasformazioni



argomenti proposti e discussi in classe

i ragazzi sono stati invitati a fornire osservazioni utili per rappresentare graficamente il prodotto di due funzioni con un esempio specifico:

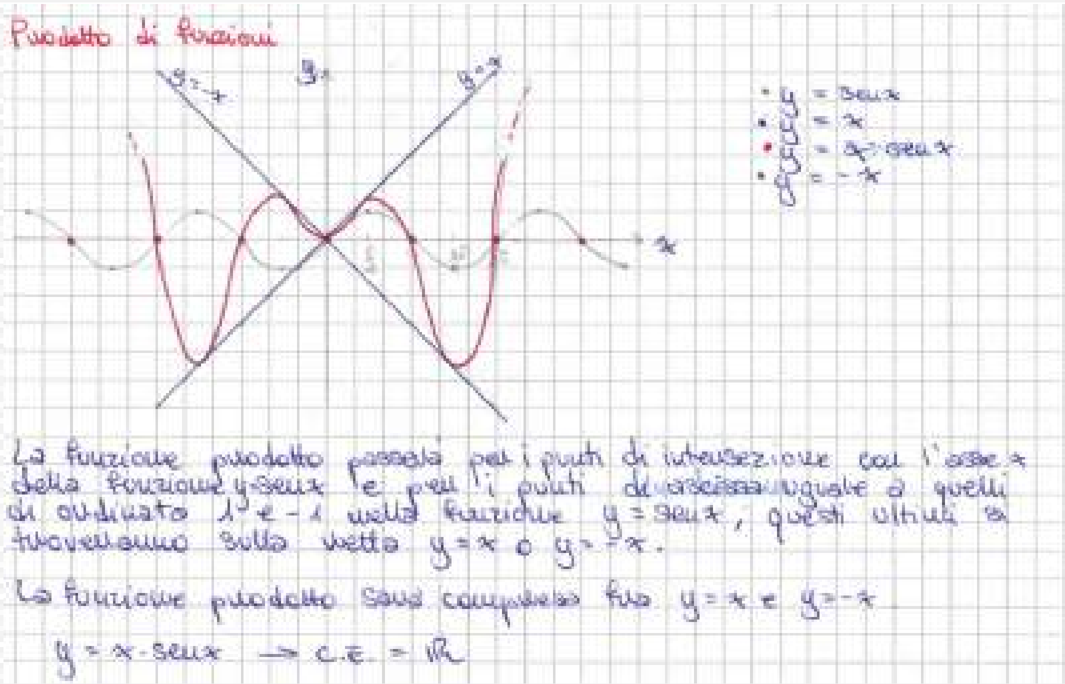
$$y = x \cdot senx$$

a partire dal grafico delle funzioni $y = x$ e $y = senx$

alcuni studenti hanno osservato che la funzione prodotto:

- si annulla quando si annulla una delle due funzioni, quindi interseca l'asse x negli stessi punti in cui senx=0
- assume gli stessi valori di y=x quando senx=1
- assume gli stessi valori di y=-x quando senx=-1
- ha come dominio l'insieme dei numeri reali come le funzioni y=x e y=senx
- ha segno positivo negli intervalli in cui le due funzioni hanno lo stesso segno, altrimenti ha segno negativo

argomenti proposti e discussi in classe



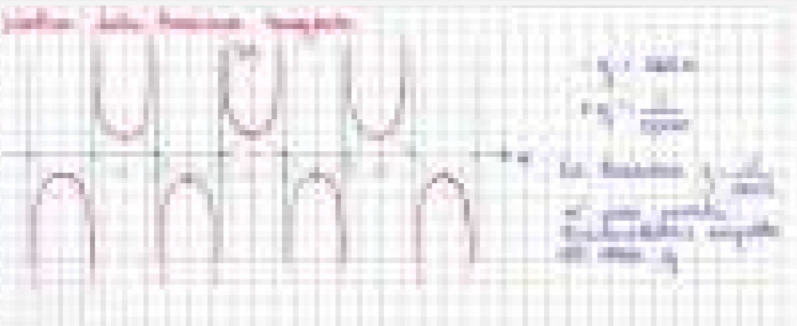
La funzione prodotto passa per i punti di intersezione con l'asse x della funzione y=senx e per i punti di ordinata uguale a quelli di ordinata 1 e -1 nella funzione y = senx, questi ultimi si troveranno sulla retta y=x o y=-x.

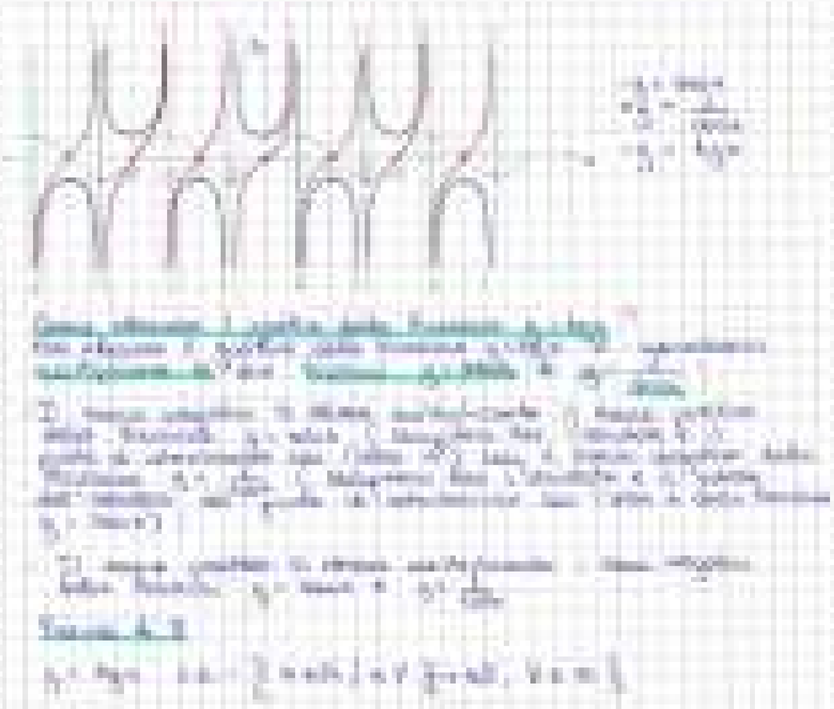
La funzione prodotto sarà compresa fra y=x e y=-x

$y = x \cdot \operatorname{sen} x \rightarrow C.E. = \mathbb{R}$

argomenti proposti e discussi in classe

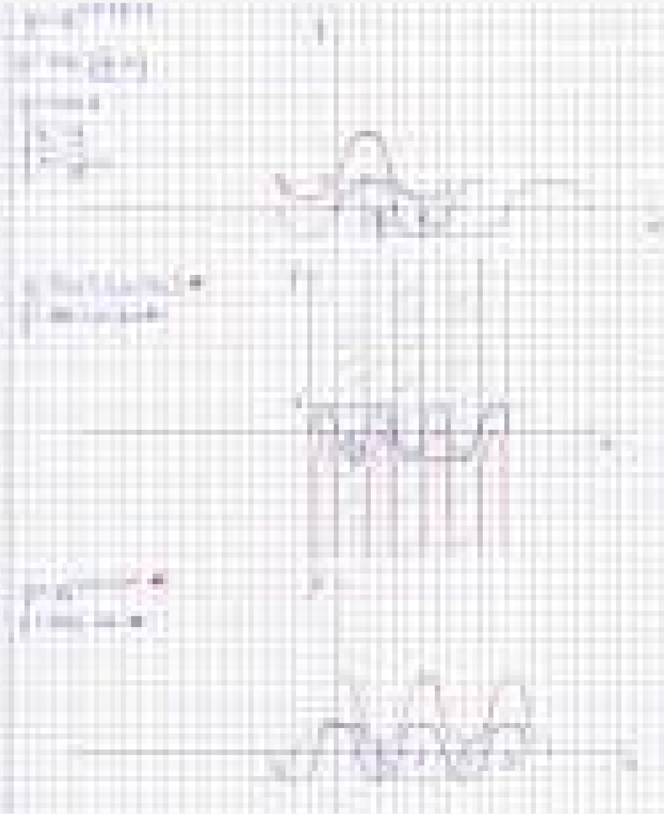
i ragazzi sono stati invitati a ricavare il grafico della funzione y=tgx





argomenti proposti e discussi in classe

grafici di funzioni composte



argomenti proposti e discussi in classe

***Le Mont Saint-Michel**

In una località sul canale della Manica la marea ha una notevole escursione e per questo è importante prevederne l'andamento. In prima approssimazione si è visto che il livello del mare può essere descritto dalla seguente funzione del tempo t:

$$h(t) = A - A\cos\left[\frac{\pi}{6}(t-b)\right] \qquad \text{con} \quad A, b \in R^{+}$$

a) Esprimendo t in ore e h in metri, determina i valori dei parametri A, b in modo che valgano contemporaneamente le condizioni:

- l'escursione tra il livello massimo e quello minimo sia di 8,0 m;
- si abbia il primo livello massimo quando t=8,0 ore.

b) Verificando che si ha A=4 e b=2, traccia il grafico della funzione h così determinata.

c) Determina per quale valore di t si ha il primo livello minimo.

*Bergamini, Barozzi «Verso la seconda prova di matematica» Ed. Zanichelli, esercizio n. 7 pag. 111

argomenti proposti e discussi in classe

argomenti proposti e discussi in classe

***Il PH**

La concentrazione molare di ioni H^+ presenti in una soluzione (indicata con $[H^+]$) varia da 1 ($=10^0$) per una soluzione di massima acidità a 10^{-14} per una soluzione di minima acidità, ovvero di massima basicità (la soluzione neutra, l'acqua pura, ha $[H^+] = 10^{-7}$).

In questa sequenza di potenze l'elemento significativo è l'esponente del 10; si definisce pertanto il PH di una soluzione come $PH = -\log[H^+]$.

Dato il PH delle seguenti soluzioni, distingui quali sono acide, neutre o basiche: acqua di mare da 7,7 a 8,3; latte 6,5; saliva da 6,5 a 7,4; sapone da 9 a 10.

*Bergamini, Trifone, Barozzi «Matematica.blu 2,0» Prima edizione, Vol. 3 Ed. Zanichelli, esercizi n. 1 pag. 628, Realtà e modelli

argomenti proposti e discussi in classe

***Non riesco a dormire!**

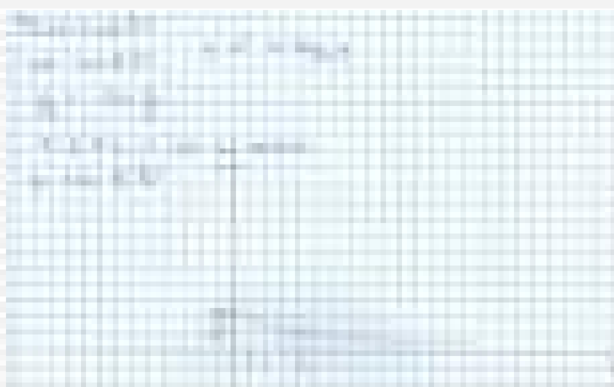
Se si beve caffè, per calcolare approssimativamente la quantità totale di caffeina presente nel corpo al passare del tempo si può utilizzare la formula

$$C(t) = C_0 e^{[illegible]}$$

dove il tempo t è espresso in ore e C_0 è la quantità di caffeina che si assume all'istante t_0 (la formula deriva da valori medi, infatti l'assorbimento della caffeina dipende fortemente dalle caratteristiche di ogni singola persona).

a) Una tazzina di caffè contiene circa 60 mg di caffeina; quanto tempo ci vuole per portare a 40 mg la quantità di caffeina nel corpo di chi l'assume?

b) Rappresentata graficamente la funzione che indica come varia la quantità di caffeina presente al variare del tempo e se si bevono due tazzine di caffè una dopo l'altra.



*Bergamini, Barozzi «Verso la seconda prova di matematica» Ed. Zanichelli, esercizi n. 7 pag. 111

problema 1 della simulazione del MIUR del 29 aprile 2016 della prova di matematica: parte iniziale

Le centraline di controllo del Po a Pontelagoscuro (Fe) registrano il valore della portata dell'acqua, ovvero il volume d'acqua che attraversa una sezione trasversale del fiume nell'unità di tempo. Come responsabile della sicurezza della navigazione fluviale in quel tratto del Po, devi valutare quando consentire la navigazione stessa, in considerazione delle condizioni atmosferiche e del livello dell'acqua.

Nel corso dell'anno le portate medie del Po (a Pontelagoscuro) sono di circa 34 milioni di m^3 al giorno in regime di magra, 130 milioni di m^3 al giorno in regime normale con un'oscillazione di 10% e 840 milioni di m^3 al giorno in regime di piena (fonte *deltadelpo.net*).

Durante un periodo di alcuni giorni di piogge intense, dalle rilevazioni registrate risulta che:

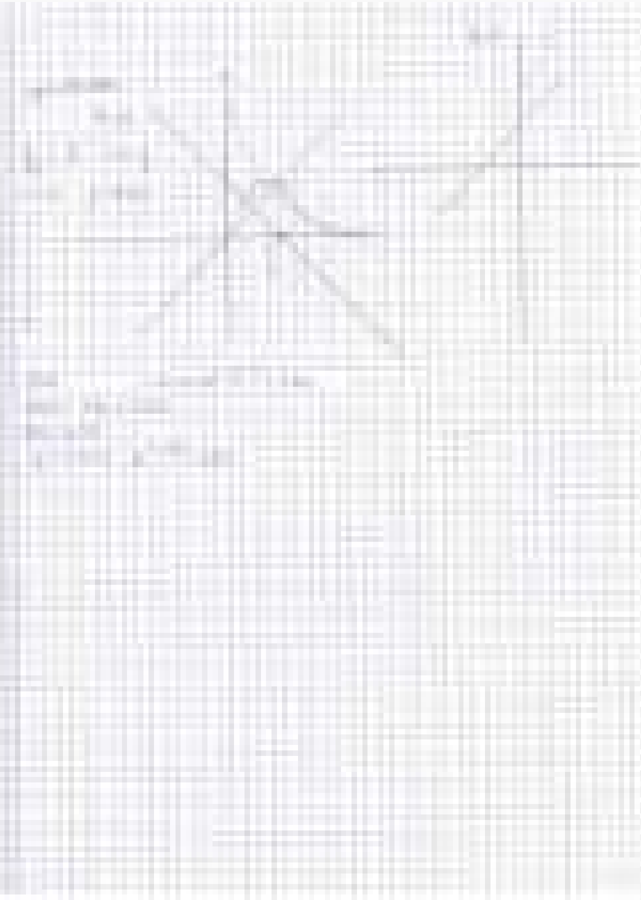
- nei primi due giorni dall'inizio delle misurazioni il valore della portata dell'acqua si è alzato dal valore di regime normale di 130 milioni di m^3 al giorno fino al valore massimo di 950 milioni di m^3 al giorno;
- nei giorni successivi la portata si è ridotta, tornando verso il valore di regime normale, inizialmente più velocemente e poi più lentamente.

1. Indicando con *t* il tempo, misurato in giorni, fissa un adeguato sistema di riferimento cartesiano in cui rappresentare il grafico dell'andamento della portata. Verifica se una delle seguenti funzioni può essere usata come modello per descrivere tale andamento, tenendo conto dei valori rilevati e del punto di massimo, giustificando con opportune argomentazioni sia la scelta che l'esclusione.

$$f(t)=a\cdot\cos(b\cdot t)+c \qquad g(t)=a\cdot e^{\frac{t}{b}}+c \qquad h(t)=a\cdot t\cdot e^{-bt}+c \qquad a,b,c\in\mathbb{R}$$

2. Individua la funzione, determina i parametri in modo che siano verificate le condizioni sopra descritte per la portata e tracciane il grafico.

problema 1 della simulazione del MIUR del 29 aprile 2016 della prova di matematica: soluzione



problema analogo al problema 2 della simulazione del MIUR del 22 aprile 2015 della prova di matematica: «il vaso» proposta agli studenti in una verifica in classe

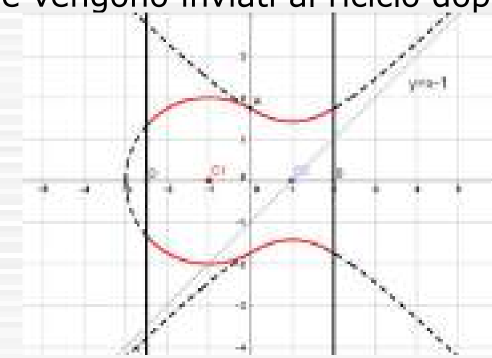
Il vaso

In un'azienda produttrice di vasi di design un progettista deve fornire le equazioni delle curve che rappresentano i profili della sezione del vaso rappresentato in fig. 1, formato da un arco di circonferenza di centro C_1 e di un tratto iperbole con centro di simmetria C_2, che hanno in A il punto di contatto. Il vaso è delimitato dalle rette passanti per i punti B e D.

a) Scrivi le equazioni di tutti i profili.

b) Per essere venduto il vaso deve essere inserito in una scatola di cartone a forma di parallelepipedo a base quadrata che contenga esattamente il vaso ed il cui sviluppo è quello rappresentato in fig. 2 (le linguette sono larghe 5 cm e "smussate" a 45°). Le scatole vengono ritagliate da fogli di cartone rettangolare di dimensioni 150 cm per 180 cm. Il materiale non utilizzato viene riciclato per la produzione di altro imballaggio. Sapendo che in fig.1, a 1 unità corrispondono 10 cm, quanti metri quadrati di cartone vengono inviati al riciclo dopo una produzione di 150 vasi con relative scatole?

fig. 1



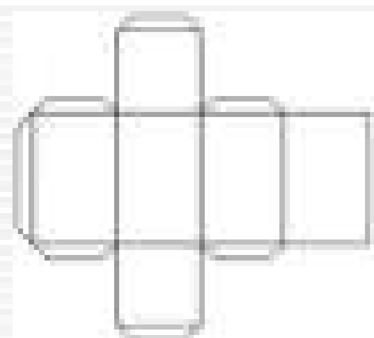


fig. 2

esempio (1) di svolgimento del problema «il vaso» eseguito in una verifica in classe dagli studenti

esempio (2) di svolgimento del problema «il vaso» eseguito in una verifica in classe dagli studenti

esempio (3) di svolgimento del problema «il vaso» eseguito in una verifica in classe dagli studenti:
non sempre la soluzione è corretta

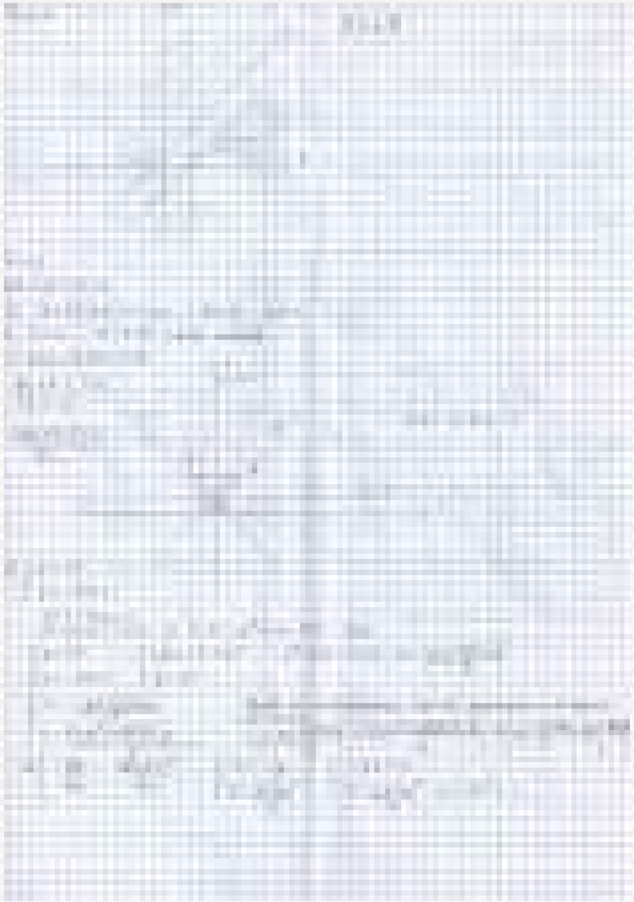
verifica (1)

1. Risolvi graficamente la seguente equazione: $\sqrt{x-2} \geq x-1$

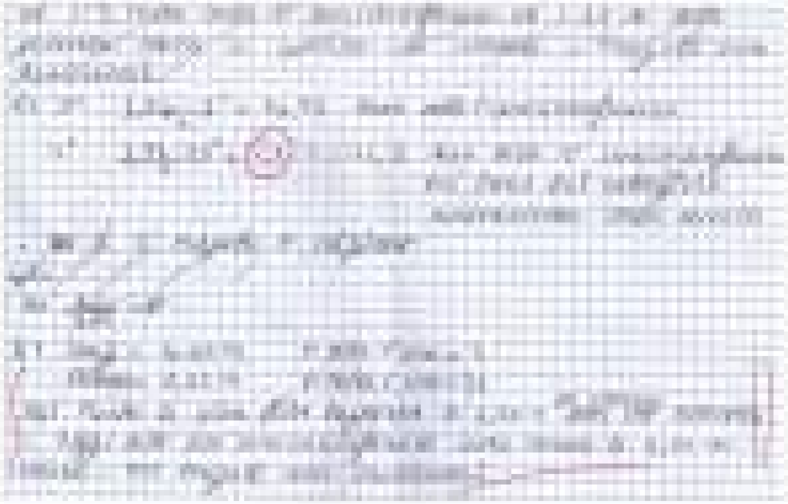
2. Dato il fascio di rette di equazione $kx + y - 1 = 0$ determinare:
   a) le rette generatrici
   b) la retta del fascio a cui non corrisponde alcun valore di *k*
   c) per quali valori di *k* le rette del fascio intersecano il segmento di estremi A(2;3) e B(2;0)
   d) l'equazione del luogo geometrico descritto dai punti medi delle corde che la parabola di equazione $y = x^2$ stacca sulle rette del fascio. Rappresentare graficamente il luogo ottenuto.

3. **Il tunnel**
Un gruppo di ingegneri deve realizzare un tunnel sotto una montagna per collegare due centri abitati. Vengono presentati i due progetti in figura (l'unità di misura è il metro su entrambi gli assi): uno prevede la realizzazione di un'unica volta semicircolare di raggio 3 metri, l'altro prevede due pareti verticali alte 1 metro sormontate da una volta semicircolare di raggio 2,5 metri.
   a) scrivere le equazioni delle due semicirconferenze che compaiono nei progetti
   b) il tunnel dovrà talvolta essere attraversato (a unica corsia) da camion che trasportano carichi eccezionali larghi complessivamente 4,60 metri e alti 1,93 metri. Stabilire, utilizzando le equazioni ottenute al punto precedente, se i progetti sono entrambi realizzabili.
   c) Quale dei due progetti comporterebbe il minor scavo di terra?

un esempio di svolgimento della verifica (1) eseguito in classe dagli studenti



un esempio di svolgimento del problema 3 della verifica (1) eseguito in classe dagli studenti: non sempre la soluzione è corretta



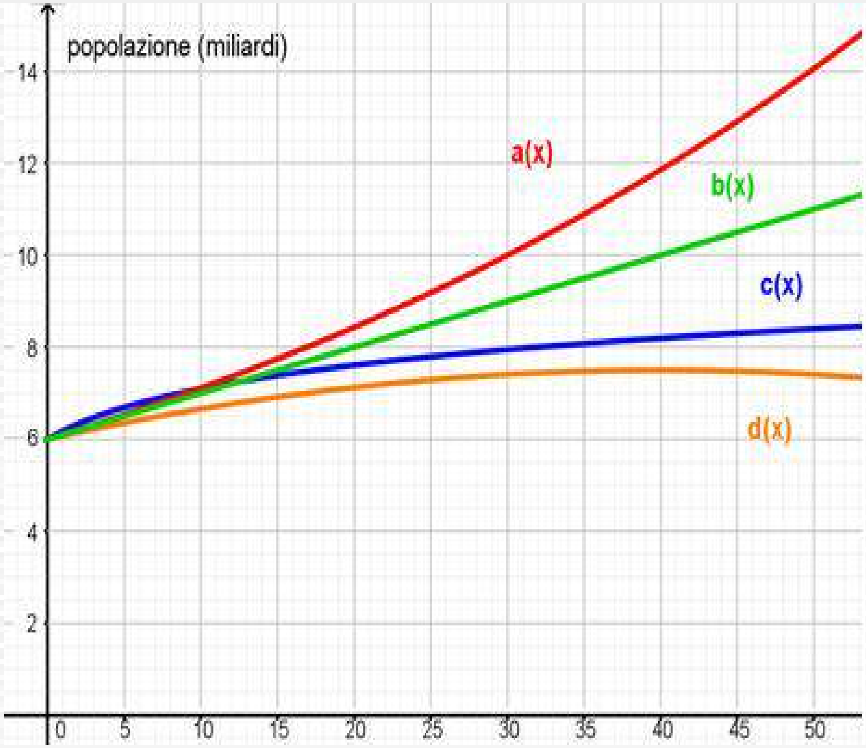
problema 1 della verifica (2) eseguita in classe dagli studenti (prima parte)

1. Crescita della popolazione

In figura sono riportati i grafici di quattro funzioni che modellizzano l'evoluzione della popolazione mondiale tra il 2000 e il 2050. I quattro diversi andamenti sono riferiti alle seguenti ipotesi di previsione:

- Natalità molto alta (funzione a(x))
- Natalità alta (funzione b(x))
- Natalità media (funzione c(x))
- Natalità bassa (funzione d(x))

La variabile x rappresenta l'anno a partire dal 2000; si assume che nel 2000 la popolazione mondiale contasse 6 miliardi di persone.



problema 1 della verifica (2) eseguita in classe dagli studenti (seconda parte)

a) Supponendo che le funzioni rappresentate abbiano le seguenti equazioni (non sono riportate in ordine):

$$y = \ln(x+5) + B \qquad y = Cx^2 + Dx + E \qquad y = k(1+\alpha)^x \qquad y = mx + q$$

associa a ciascun grafico la corrispondente equazione, motivando esaurientemente le tue scelte.
b) Con l'ausilio dei dati che puoi ricavare dai grafici, determina i possibili valori dei parametri A, B, C, D, E, k, α, m, q che compaiono nelle espressioni analitiche del punto a) e calcola la previsione che ciascuna funzione fornisce per la popolazione mondiale nel 2060 arrotondando i risultati in miliardi a due cifre decimali.
c) Associa a ciascuna delle funzioni la corrispondente proprietà, fra le seguenti, motivando adeguatamente le tue scelte:

- La velocità di variazione della popolazione è costante
- La velocità di variazione della popolazione si annulla in un solo punto
- La velocità di variazione della popolazione diminuisce nel tempo ma non si annulla mai
- La velocità di variazione della popolazione aumenta nel tempo

un esempio di svolgimento del problema 1 della verifica (2) eseguito in classe dagli studenti

un esempio di svolgimento del problema 3 della verifica (2) eseguito in classe dagli studenti: non sempre la soluzione è corretta

risultati ottenuti

- la grande maggioranza degli studenti è in grado di tracciare, almeno qualitativamente, il grafico di una data funzione e di saperne riconoscere le caratteristiche più significative
- la maggior parte degli studenti riesce ad interpretare correttamente le caratteristiche suddette alla luce di situazioni concrete
- non tutti sono in grado di commentare i risultati ottenuti con l'uso di una terminologia adeguata anche mettendo a confronto più possibili modelli rappresentativi di situazioni concrete

valutazione dell’efficacia del percorso didattico sperimentato

- l’attività svolta ha permesso agli studenti di avere una visione d’insieme delle principali tipologie di funzioni con il vantaggio di evitarne una trattazione “settoriale” e “isolata”. Utilizzando anche le trasformazioni geometriche e la composizione tra funzioni è stato possibile “modificarle” e “legarle tra loro” e tutto ciò ha permesso agli studenti di fare propri i concetti di dominio, codominio, monotonia, … confrontando anche i vari grafici tra loro
- i continui riferimenti a situazioni concrete hanno aiutato gli studenti a comprendere al meglio il significato di “variabili” di un problema e dell’insieme numerico al quale possono appartenere, li ha resi più consapevoli del concetto di “dipendenza tra variabili” e li ha portati a valutare in modo piuttosto naturale le condizioni sulle loro limitazioni
- lavorare in questo modo ha permesso di gettare le basi per un successivo sviluppo dei concetti di limite e derivata e di rendere naturale agli studenti l’utilizzo di questo strumento matematico per risolvere problemi relativi alle diverse discipline