REGIONE TOSCANA

Laboratori del Sapere Scientifico

Iniziativa realizzata con il contributo della Regione Toscana nell'ambito del progetto

Rete Scuole LSS

A bottega di Invenzioni

a.s. 2015/2016

Liceo Statale "C. Lorenzini"
Classico, Linguistico, Scientifico,Scienze umane
Pescia (PT)

contesti di realtà e modelli matematici

un percorso integrato alla scoperta delle proprietà e dell'efficacia delle diverse funzioni matematiche nello studio e nell'interpretazione di contesti vero-simili

(prima parte)

a.s. 2015-2016

collocazione del percorso effettuato nel curricolo verticale

il percorso è stato svolto nelle classi terze del liceo scientifico, volto a fornire allo studente una visione complessiva delle principali funzioni matematiche come strumento di indagine del mondo «reale», quando gli studenti sono in grado di risolvere equazioni e disequazioni algebriche e di rappresentare nel piano cartesiano semplici funzioni

obiettivi essenziali di apprendimento

- conoscere le principali funzioni algebriche e trascendenti
- saper effettuare trasformazioni geometriche nel piano cartesiano
- determinare le equazioni di funzioni composte e dedurne il grafico noti i grafici delle funzioni elementari utilizzate
- modellizzare con una funzione opportuna un problema «reale»
- saper individuare tra più funzioni date quella che è adatta a modellizzare una particolare situazione «reale»
- avviare ad uno studio critico che stimoli i collegamenti tra le conoscenze acquisite e i fenomeni della realtà quotidiana

elementi salienti dell’approccio metodologico

a differenza del classico approccio, si propone un percorso innovativo che anticipa alla classe terza lo studio delle principali funzioni matematiche anche contestualizzandole in ambito «reale»; gli elementi sono:

- rappresentare graficamente funzioni di complessità gradualmente crescente anche con l’utilizzo di supporti informatici
- stimolare gli studenti ad analizzare e discutere criticamente i grafici ottenuti al fine di riconoscerne le principali caratteristiche
- interpretare consapevolmente le caratteristiche individuate quando la funzione rappresenta un modello di una situazione concreta

tutto ciò ha permesso agli studenti, attraverso la correzione degli elaborati e le continue discussioni in classe, di appropriarsi degli strumenti di indagine della «realtà» e di imparare a utilizzare i concetti acquisiti in situazioni nuove

materiali, apparecchi e strumenti utilizzati

- internet (per ricercare contesti applicativi di «nuove» funzioni)
- software per costruire grafici (geogebra)

ambienti di lavoro in cui è stato sviluppato il percorso

- laboratorio multimediale
- aula scolastica
- a casa

tempi impiegati

- per la messa a punto preliminare nel gruppo LSS: 16 h
- la progettazione specifica nella classe, lo sviluppo del percorso a scuola, la documentazione, la strutturazione del percorso e la verifica dei risultati hanno impegnato buona parte delle ore assegnate alla disciplina nell’anno scolastico 2015/2016

altre informazioni

- il percorso si sviluppa attraverso un raccordo continuo tra le varie discipline scientifiche e i diversi contesti «reali» con lo scopo di:
  - contestualizzare le varie funzioni in situazioni concrete diverse
  - economizzare i tempi di lavoro
- sono state evidenziate in rosso le parti che sintetizzano i contenuti degli interventi degli studenti
- di seguito viene indicato l’intero lavoro affrontato in classe di cui, a causa della notevole quantità di materiale, viene presentata solo la prima parte

descrizione sintetica dell’attività

il “percorso” proposto ha occupato quasi tutto l’anno scolastico e, con un approccio che coinvolgesse direttamente gli studenti e stimolasse continuamente un’analisi critica dei problemi proposti (anche con l’uso di software come geogebra), sono state introdotte nell’ordine:

- funzioni potenza $y = x^x$ e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- funzioni reciproche $y = \frac{1}{f(x)}$ e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- funzioni irrazionali $y = \sqrt{f(x)}$ e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- luoghi geometrici nel piano cartesiano sia in forma parametrica che in forma cartesiana e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- equazione delle quattro coniche nel piano cartesiano e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- funzione inversa $y = f^{-1}(x)$ di una funzione e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- funzione esponenziale e funzione logaritmo e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- funzioni goniometriche e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- funzioni composte e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni

descrizione sintetica dell’attività

al termine del “percorso” gli studenti dovrebbero essere in grado di:

- tracciare il grafico probabile di una funzione algebrica e trascendente senza utilizzare gli strumenti propri dell’analisi matematica
- analizzare le principali caratteristiche della funzione deducendole dal suo grafico
- utilizzare i grafici ottenuti per risolvere equazioni e disequazioni di vario tipo
- riconoscere, tra più funzioni fornite, quella in grado di rappresentare al meglio una data situazione concreta
- costruire (e non scegliere) una funzione in grado di rappresentare una data situazione concreta

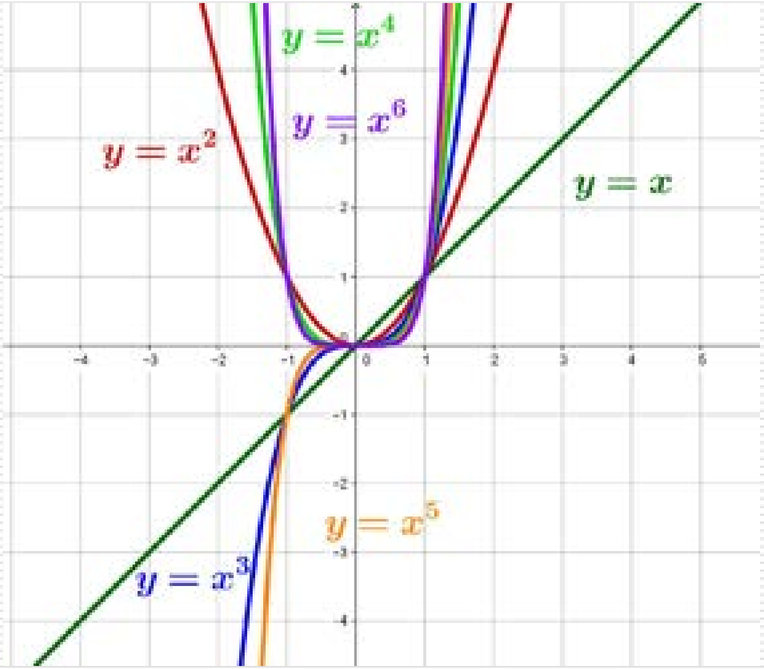
descrizione sintetica dell'attività

in questo percorso viene presentata la prima parte del lavoro relativa:

- allo studio di:
  - funzioni potenza $y = x^n$ e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
  - funzioni reciproche $y = \frac{1}{f(x)}$ e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
  - funzioni irrazionali $y = \sqrt{f(x)}$ e loro trasformate per isometrie e/o dilatazioni
- alla loro applicazione:
  - in contesti reali
  - alla risoluzione del primo problema della sessione ordinaria dell'Esame di Stato 2014/2015

argomenti proposti e discussi in laboratorio multimediale

- nella lezione introduttiva allo studio delle funzioni:
  - gli studenti sono stati invitati a rappresentare graficamente alcune funzioni potenza ($y=x^n$) con geogebra
  - a osservare le loro principali caratteristiche



osservazioni emerse dalla discussione con gli studenti

alcuni ragazzi osservano che:

- le curve passano tutte per l'origine e per il punto (1;1)
- le curve di grado dispari passano anche per il punto (-1;-1)
- e curve di grado pari "somigliano" a parabole
- le curve aumentano la ripidità all'aumentare della potenza se $x>1$ o $x<-1$, accade il contrario se $-1<x<1$
- sono tutte funzioni
- le curve con esponente pari si trovano nel primo e secondo quadrante
- le curve con esponente dispari si trovano nel primo e terzo quadrante
- nelle curve con esponente pari "un valore di y corrisponde a due valori di x"

argomenti proposti e discussi in classe

l'insegnante:

- formalizza le "osservazioni" sui grafici: dominio, codominio, iniettività, suriettività, monotonia, funzioni pari, funzioni dispari, …
- propone un problema <u>risolvibile con funzioni potenza</u> tratto dal libro di testo in uso nella classe: Bergamini, Trifone, Barozzi «Matematica.blu 2,0» Vol. 3 Ed. Zanichelli pag. 148, n.1:

  Bagaglio a mano

  Le regole per il bagaglio a mano di diverse compagnie aeree stabiliscono che la valigia (o borsa) deve avere un peso massimo di 5 kg e che la somma dei lati non deve superare i 115 cm. In molti modelli le borse per bagaglio a mano hanno una larghezza che supera di 15 cm la profondità.

  - Approssimando la forma della valigia a un parallelepipedo, esprimi il volume in funzione della profondità e studia il segno della funzione volume.
  - Costruisci per punti una rappresentazione grafica approssimata della funzione volume e stabilisci con quali dimensioni (all'incirca)si ottiene la capienza massima della borsa.

argomenti proposti e discussi in classe

argomenti proposti e discussi in laboratorio multimediale

- GEOGEBRA: grafici delle funzioni

$$y = |f(x)| \qquad y = f|x| \qquad y = f(x+k) \qquad y = f(x)+k$$

$$y = f(x) \qquad y = k \cdot f(x) \qquad y = f(kx)$$

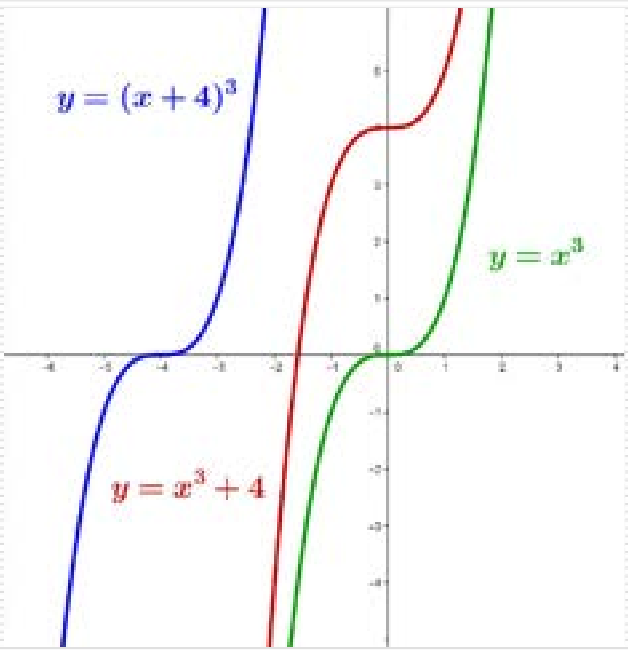
applicati alle funzioni potenza

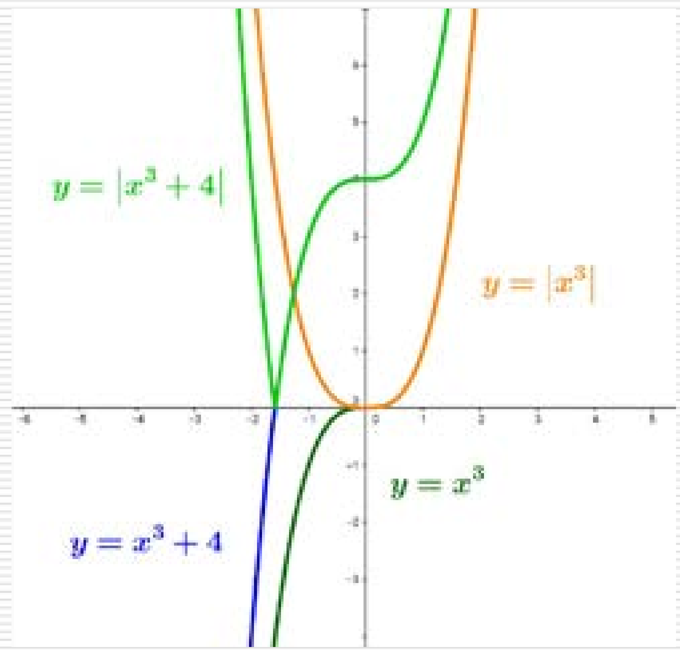
- e relative osservazioni …: come si trasformano (in base alla lettura dei grafici) le curve nei vari casi

argomenti proposti e discussi in laboratorio multimediale

GEOGEBRA: esempi di grafici

$y = x^3 + 4$ $\quad$ $y = (x+4)^3$ $\quad$ $y = \left|x^3 + 4\right|$ $\quad$ $y = |x|^3$





argomenti proposti e discussi in laboratorio multimediale

… le osservazioni degli studenti nei vari casi:

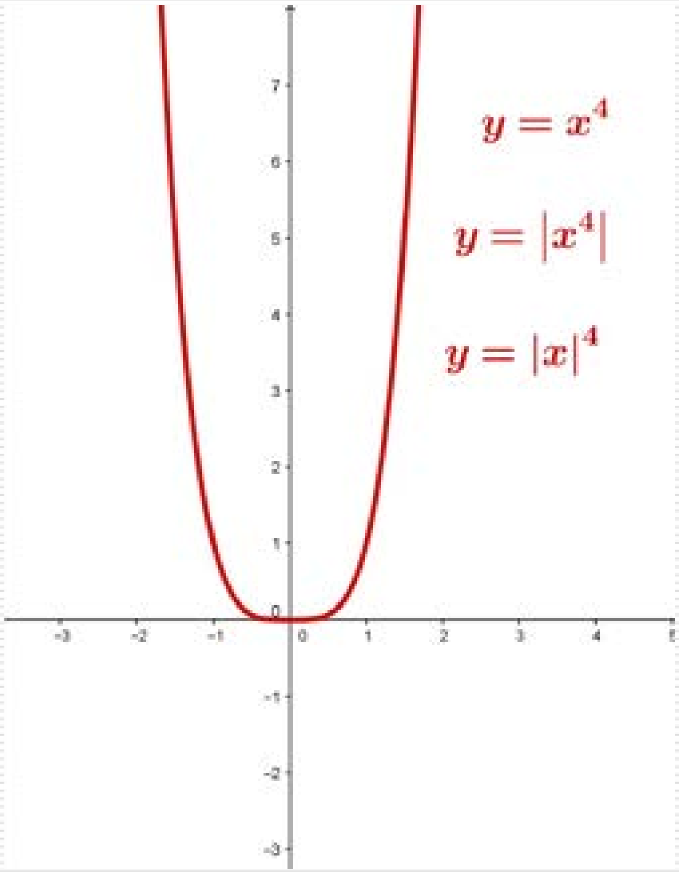
- i grafici «si spostano» orizzontalmente o verticalmente aggiungendo o togliendo un numero
- i grafici «si ribaltano» rispetto a uno degli assi cartesiani quando è presente il valore assoluto

argomenti proposti e discussi in laboratorio multimediale

… le osservazioni degli studenti nei vari casi:

- in alcuni casi i grafici non cambiano: ad esempio

$$y = x^4 \qquad y = \left| x^4 \right| \qquad y = \left| x \right|^4$$

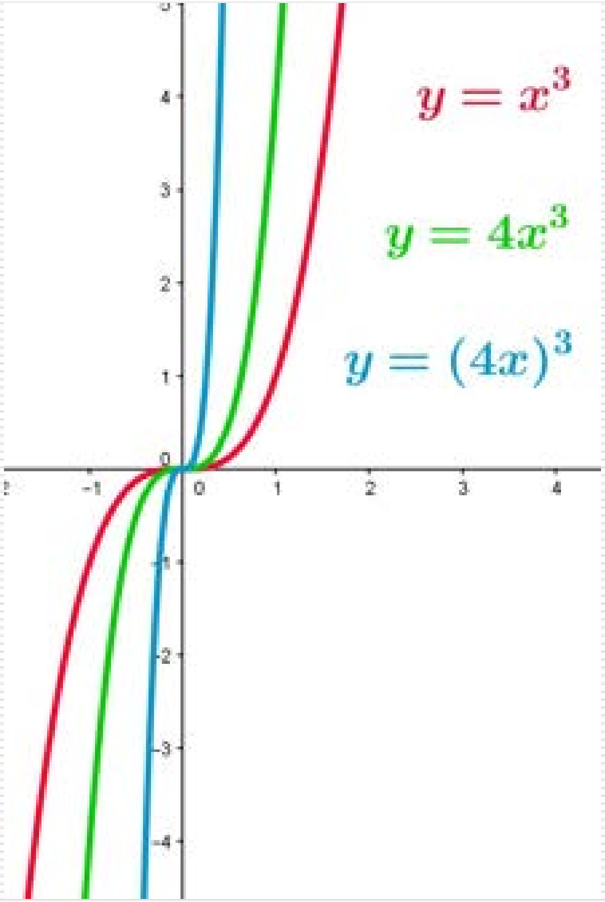


argomenti proposti e discussi in laboratorio multimediale

- GEOGEBRA: esempi di grafici …

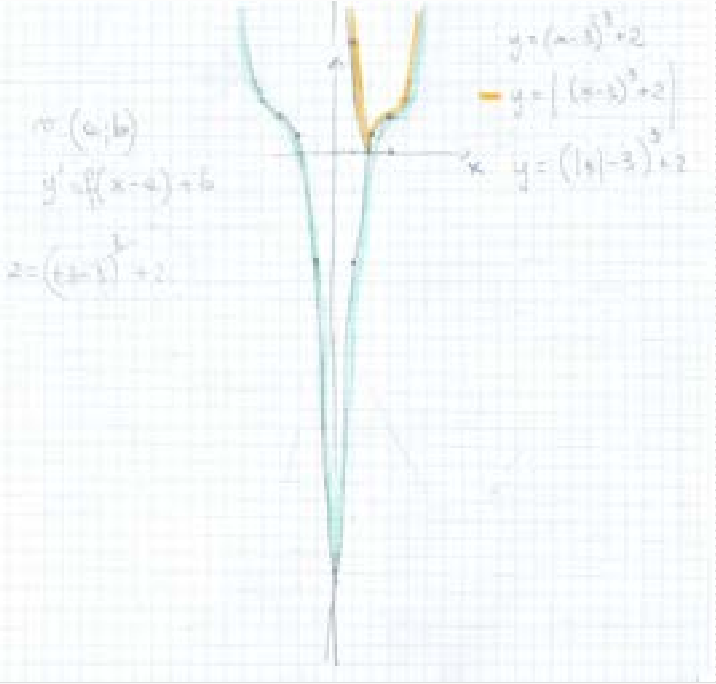
  $y=x^3$ $y=4x^3$ $y=(4x)^3$

- … e le osservazioni degli studenti nei vari casi:
  - i grafici «si deformano»
  - sembrano «tirati» orizzontalmente o verticalmente, moltiplicando per un numero



argomenti proposti e discussi in classe

esempio di esercizio svolto dagli studenti



argomenti proposti e discussi in classe

gli studenti, nella discussione anche guidata, hanno dedotto con autonomia crescente:

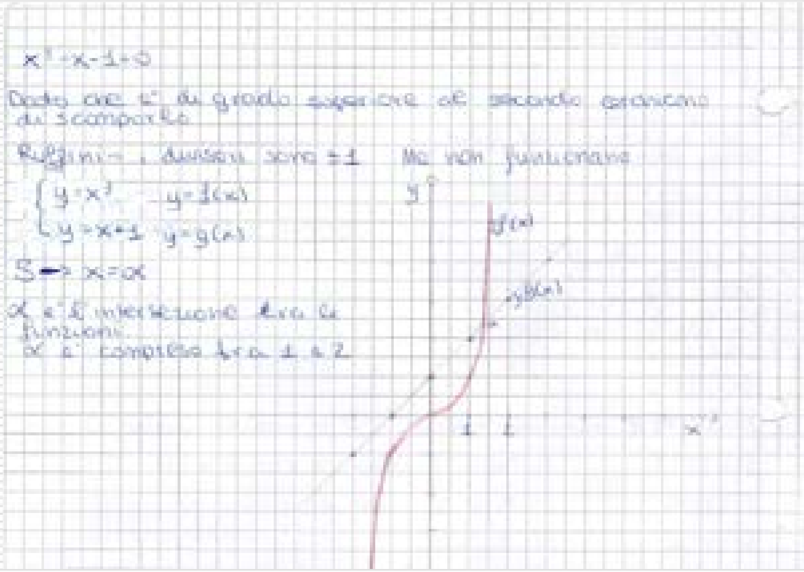
- le equazioni della traslazione, delle simmetrie assiali rispetto agli assi coordinati e della simmetria centrale rispetto all'origine
- le equazioni delle simmetrie rispetto a rette parallele agli assi coordinati e rispetto a un generico punto

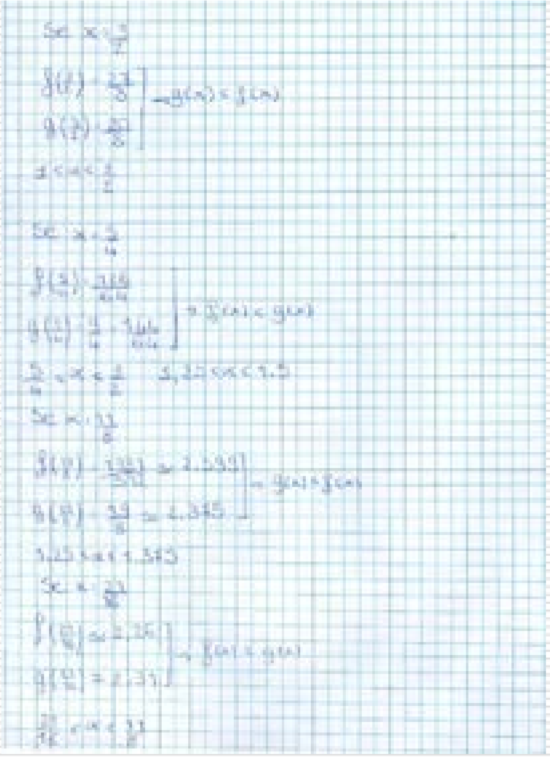
l'insegnante ha introdotto le omotetie e le dilatazioni/contrazioni

argomenti proposti e discussi in classe

risoluzione grafica di un’equazione algebrica irriducibile mediante il metodo di bisezione applicato a funzioni potenza

$$x^3-x-1=0$$

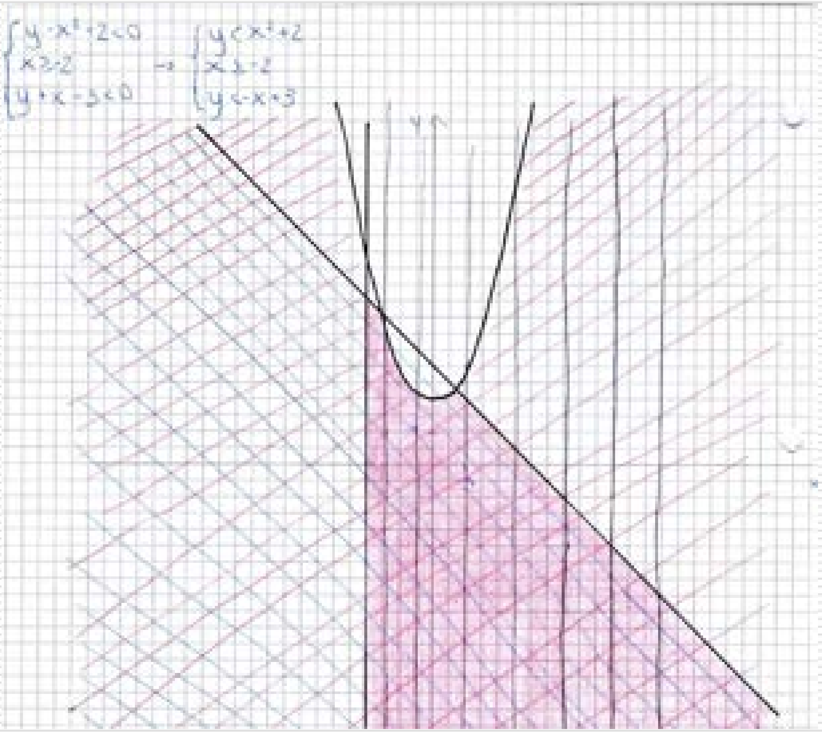




argomenti proposti e discussi in classe

disequazioni in due variabili utilizzando i grafici di funzioni potenza

$$\begin{cases} y - x^2 - 2 < 0 \\ x \geq -2 \\ y + x - 3 < 0 \end{cases}$$



argomenti proposti e discussi in classe

gli studenti sono stati invitati a ricavare il grafico della funzione

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

noto il grafico di y=f(x), dove f(x) è una funzione potenza, riflettendo su come ottenere il grafico di tale funzione a partire da quello di f(x)

argomenti proposti e discussi in classe

i ragazzi sono stati invitati a fornire osservazioni utili per rappresentare graficamente la curva con un esempio specifico:

$$y = \frac{1}{9 - x^2}$$

hanno rappresentato la parabola $y = 9 - x^2$

argomenti proposti e discussi in classe

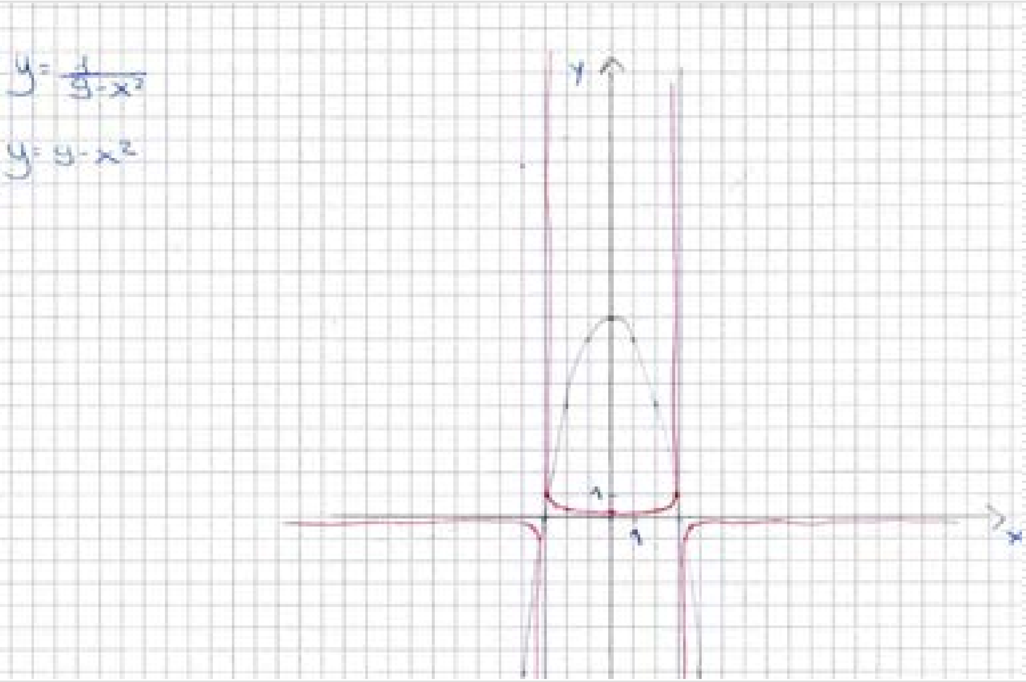
con qualche aiuto iniziale, senza insistere troppo sulla formalizzazione del linguaggio, alcuni ragazzi osservano da soli che:

- il reciproco di 1 è 1
- il reciproco di 9 è 1/9
- non si può determinare il reciproco di zero
- quando il denominatore si “avvicina a zero” il reciproco diventa “grande”
- dove la parabola è positiva anche il reciproco è positivo
- il reciproco di -1 è -1
- quando le y della parabola diventano “grandissime”, il reciproco è “piccolissimo”…

argomenti proposti e discussi in classe

i ragazzi hanno poi calcolato il reciproco di altri punti e hanno ottenuto il grafico

$$y = \frac{1}{9 - x^2}$$



argomenti proposti e discussi in classe

gli studenti sono stati invitati a ricavare il grafico della funzione

$$y = \sqrt{f(x)}$$

noto il grafico di y=f(x), dove f(x) è una funzione potenza, riflettendo su come ottenere il grafico di tale funzione a partire da quello di f(x)

argomenti proposti e discussi in classe

i ragazzi sono stati invitati a fornire osservazioni utili per rappresentare graficamente la curva con un esempio specifico:

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

hanno rappresentato la parabola $y = 9 - x^2$

argomenti proposti e discussi in classe

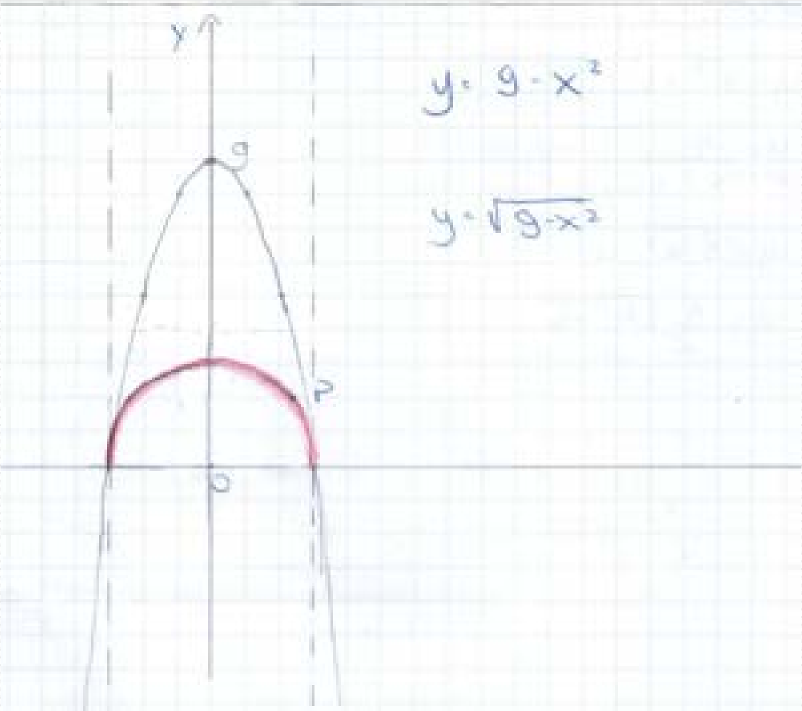
con qualche aiuto iniziale, senza insistere troppo sulla formalizzazione del linguaggio, alcuni ragazzi osservano da soli che:

- non si può calcolare la radice quadrata di un numero negativo
- la radice quadrata di 9 è 3
- la radice quadrata di 0 è 0
- dove la parabola vale 4, la radice è 2
- dove la parabola vale 1, la radice è 1

argomenti proposti e discussi in classe

i ragazzi hanno poi calcolato la radice quadrata di altri punti e hanno ottenuto il grafico

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$



argomenti proposti e discussi in classe

dopo aver tracciato il grafico qualcuno osserva che questo "somiglia ad una semicirconferenza"

a questo punto non si può omettere di determinare un modo per controllare se si tratta soltanto di una somiglianza o se abbiamo tracciato davvero una semicirconferenza

invitati a trovare una risposta esauriente al problema, qualcuno osserva che:

"i punti di intersezione con gli assi cartesiani hanno tutti distanza 3 dall'origine"

l'insegnante ha fatto notare che questo non è sufficiente perché TUTTI i punti devono avere distanza 3 dall'origine; ma come verificarlo?

il problema si è rivelato molto meno banale del previsto….

argomenti proposti e discussi in classe

… non è stato semplice far venire ai ragazzi l’idea di considerare un generico punto sulla curva e verificare che la sua distanza dall’origine è sempre 3 indipendentemente dal valore della sua ascissa!

$P \in y = \sqrt{9-x^2}$ È una circonferenza?

$O(0;0)$

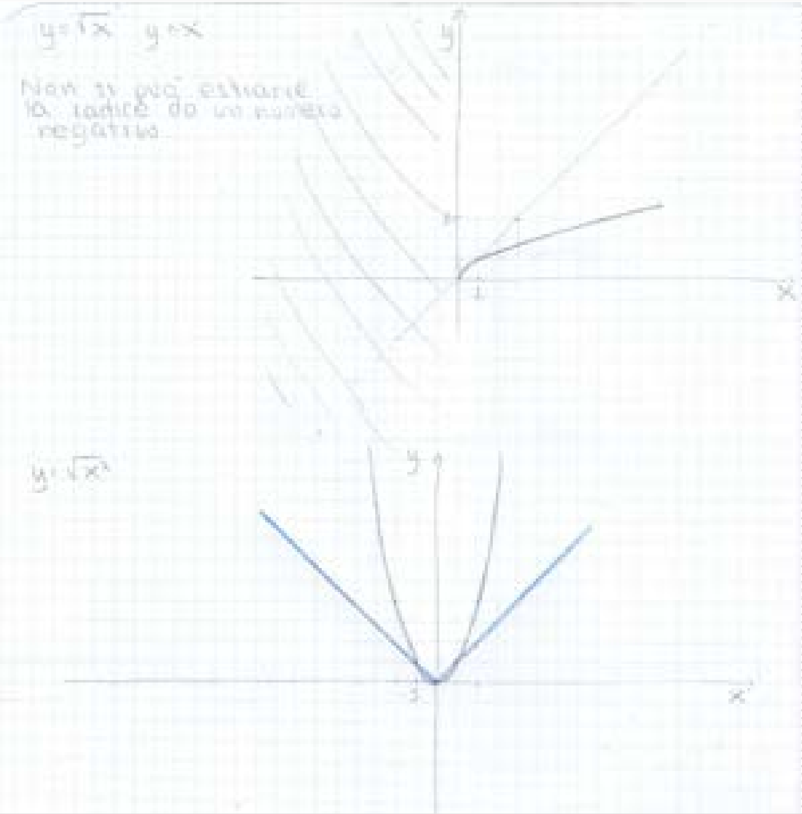
$P(x; \sqrt{9-x^2})$

$\overline{PO} = \sqrt{(x-0)^2 + (\sqrt{9-x^2}-0)^2}$

$\overline{PO} = \sqrt{\cancel{x^2} + 9 - \cancel{x^2}} \rightarrow \sqrt{9}$ $\overline{PO} = +3$

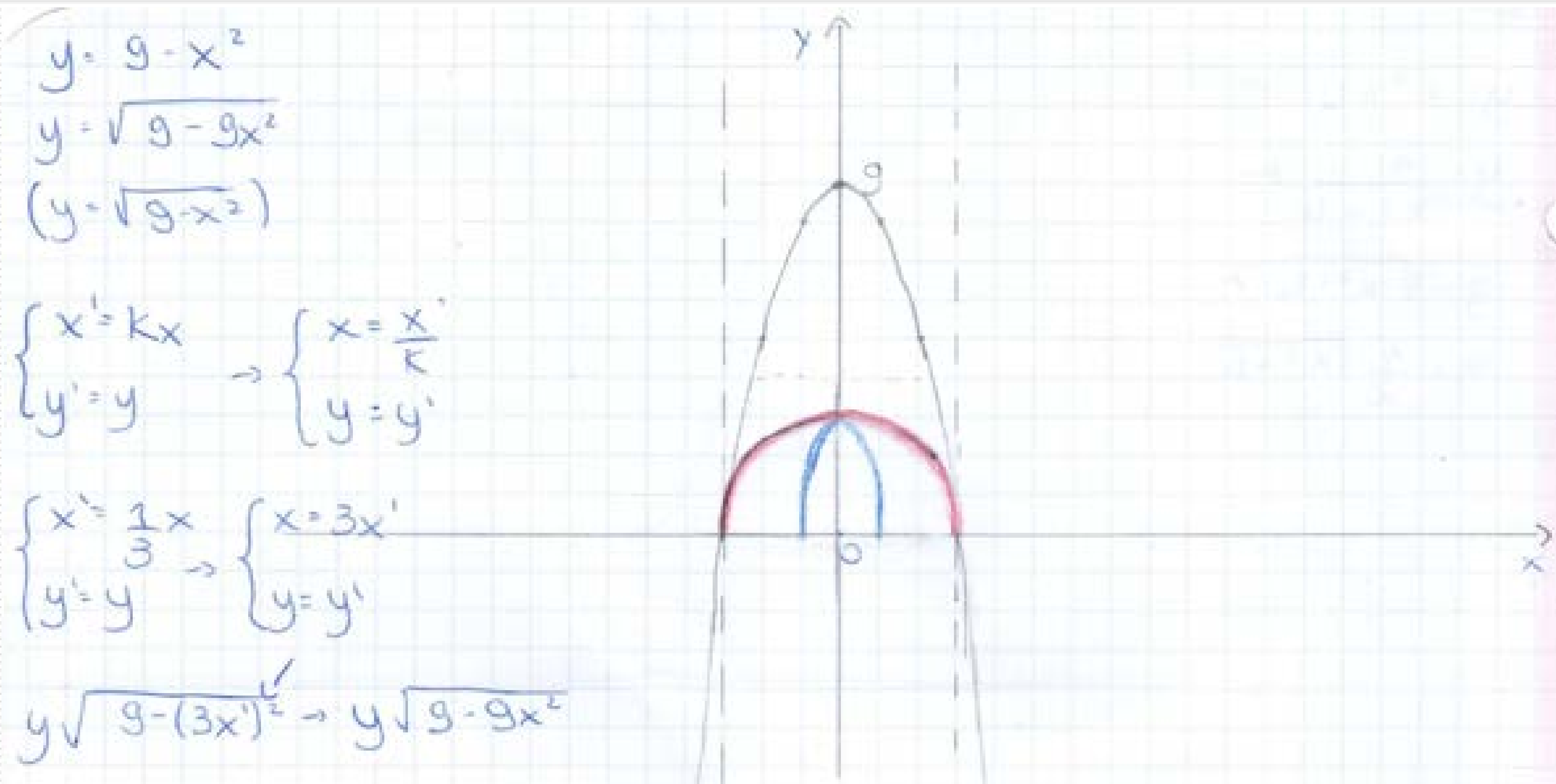
argomenti proposti e discussi in classe

esempio di esercizio svolto dagli studenti:



argomenti proposti e discussi in classe

esempio di esercizio svolto dagli studenti:



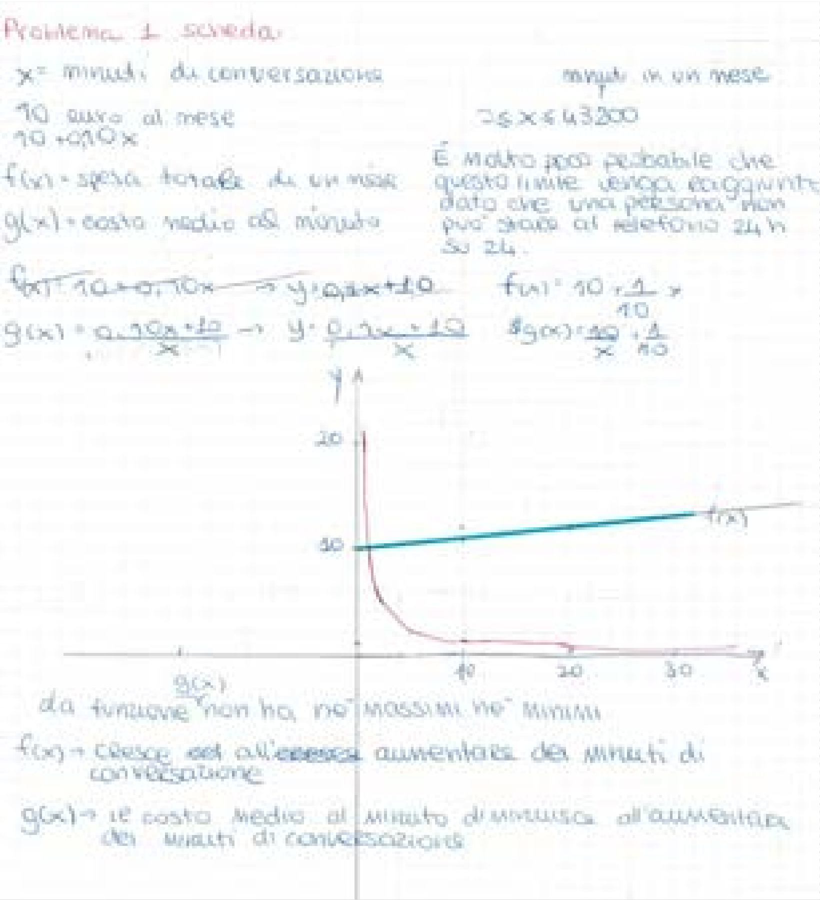
problema 1 del tema di matematica della sessione ordinaria dell’Esame di Stato 2014/2015: parte iniziale

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate dall'estero, un canone fisso da 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

1. Individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.

……

problema 1 del tema di matematica della sessione ordinaria dell'Esame di Stato 2014/2015: soluzione



Problema 1 scheda

x = minuti di conversazione

10 euro al mese
10 + 0,10 x

f(x) = spesa totale di un mese

g(x) = costo medio al minuto

minuti in un mese

$0 \leq x \leq 43200$

È molto poco probabile che questo limite venga raggiunto dato che una persona non può stare al telefono 24 h su 24.

$\cancel{f(x) = 10 + 0,10x} \rightarrow y = 0,1x + 10$

$f(x) = 10 + \frac{1}{10}x$

$g(x) = \frac{0,10x + 10}{x} \rightarrow y = \frac{0,1x + 10}{x}$

$g(x) = \frac{10}{x} + \frac{1}{10}$

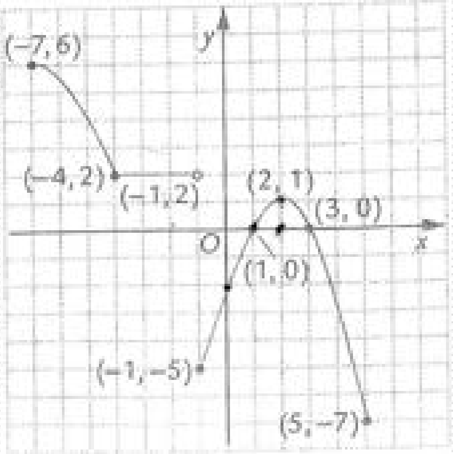
la funzione non ha né massimi né minimi

f(x) → cresce ~~col~~ all'~~crescere~~ aumentare dei minuti di conversazione

g(x) → il costo medio al minuto diminuisce all'aumentare dei minuti di conversazione

verifica (1)

1. Facendo riferimento al grafico in figura, determinare:
a) quanto valgono f(1) e f(-1)
b) se f(0) è positivo o negativo
c) qual è il dominio della funzione
d) qual è il codominio della funzione
e) quali sono gli zeri della funzione
f) quante soluzioni ha l'equazione f(x) = 2
g) in quale intervallo la funzione è crescente?



2. Data la funzione

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

a) riscrivere la funzione riconoscendo in essa il cubo di un binomio
b) rappresentare graficamente la funzione y = f (x)
c) scrivere l'equazione della funzione g (x) = f (x) + 2, rappresentarla graficamente, determinare la trasformazione che "porta" la funzione y = f(x) nella funzione g(x) e verificarla algebricamente
d) rappresentare graficamente le funzioni

verifica (1)

3. Risolvere graficamente reiterando due volte il metodo di bisezione: .

$$x^3 + |x - 3| = 0$$

4. Il costo del biglietto aereo

Una compagnia aerea decide di stabilire il prezzo del biglietto di volo (per persona) nel seguente modo: 200 euro più 10 euro per ogni posto che resterà libero. L'aereo dispone di 150 posti.

Indicando con x il numero di posti rimasti liberi

a) scrivere la funzione f(x) che rappresenta il ricavo della compagnia riguardo ad un viaggio dell'aereo

b) rappresentare graficamente la funzione f(x) limitatamente ai limiti imposti dal problema

c) quanti posti devono rimanere liberi affinché la compagnia abbia il massimo ricavo?

d) quanto ricava la compagnia se sull'aereo non rimangono posti liberi?

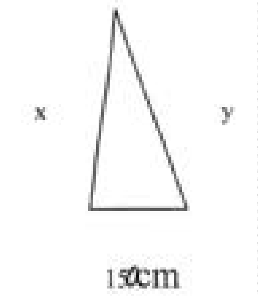
e) Il ricavo ottenuto al punto precedente si potrebbe ottenere anche nel caso in cui alcuni posti rimangano liberi, quanti?

verifica (1)

5. Il problema del falegname.

Un falegname deve costruire un triangolo sopra un'asta di lunghezza 150 cm in modo che questo sia il lato minore. Per farlo deve tagliare due listelli di legno ed assemblare il triangolo richiesto. Quali valori potranno assumere le lunghezze x, y dei due listelli ?

(Ricorda che in un triangolo ciascun lato deve essere minore ……..e maggiore …….)



6. La formula che permette di calcolare il volume di un cono è

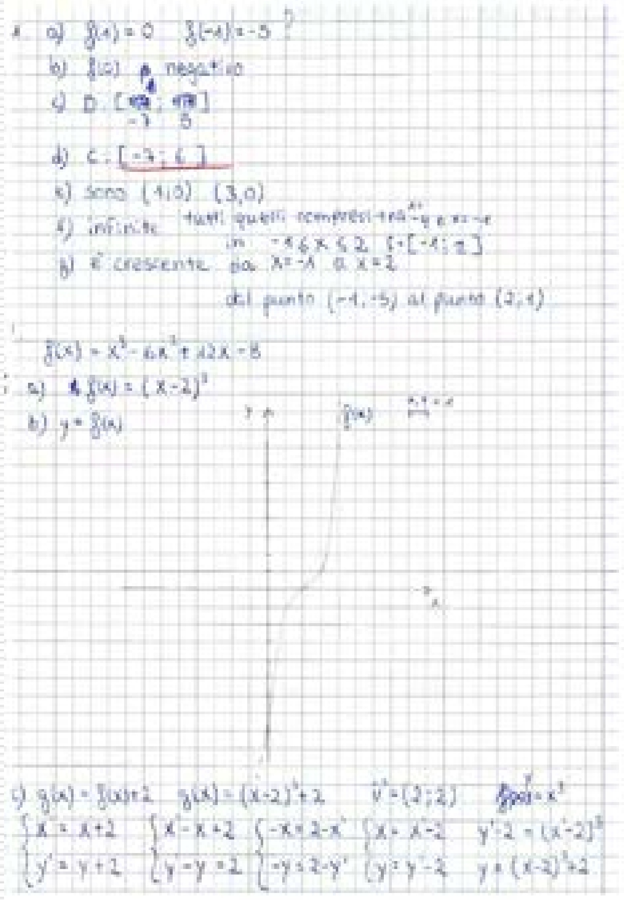
$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

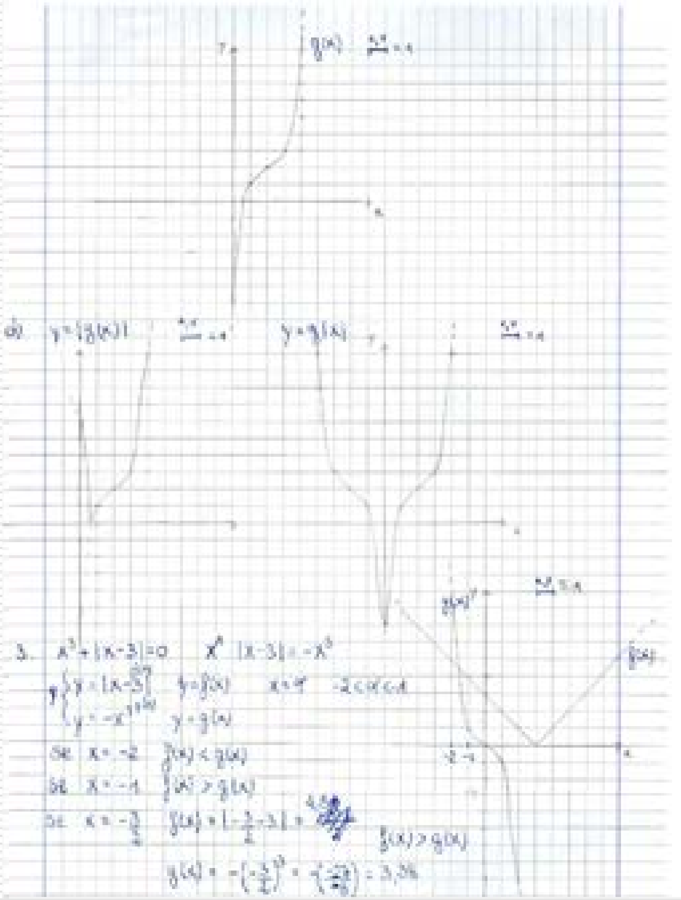
dove r è il raggio di base e h l'altezza.

a) Considerando coni di raggio di base costante e altezza variabile, quale linea si ottiene rappresentando (in un piano cartesiano h-V) la funzione che esprime il volume del cono in funzione dell'altezza (rimanendo costante il raggio di base?).

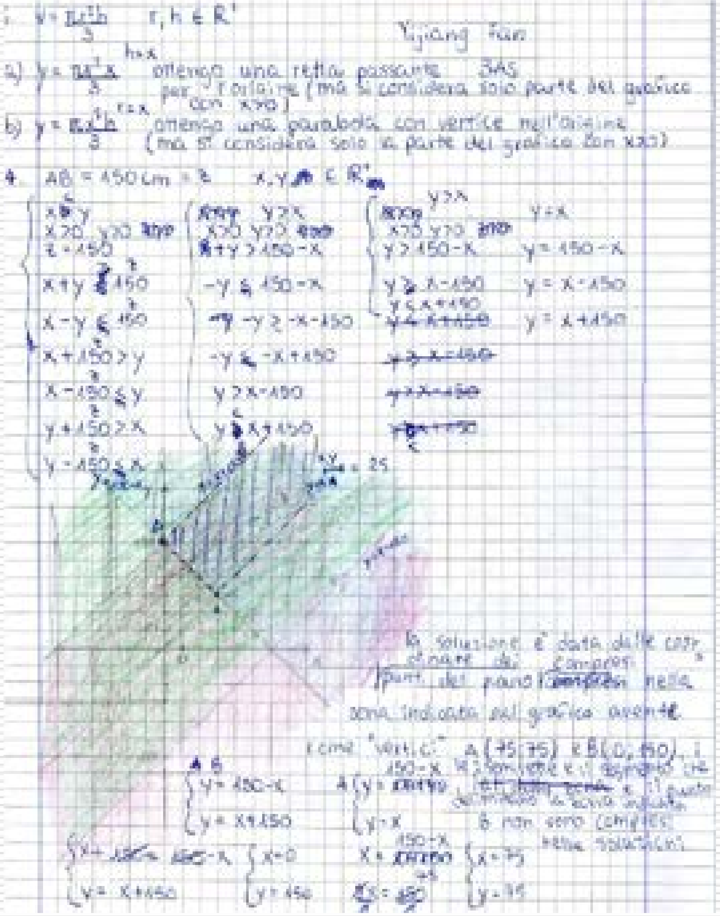
b) Considerando coni di altezza costante e raggio di base variabile, quale linea si ottiene rappresentando (in un piano cartesiano r-V)la funzione che esprime il volume V del cono in funzione del raggio r (rimanendo costante l'altezza)?

un esempio di svolgimento della verifica (1) eseguito in classe dagli studenti

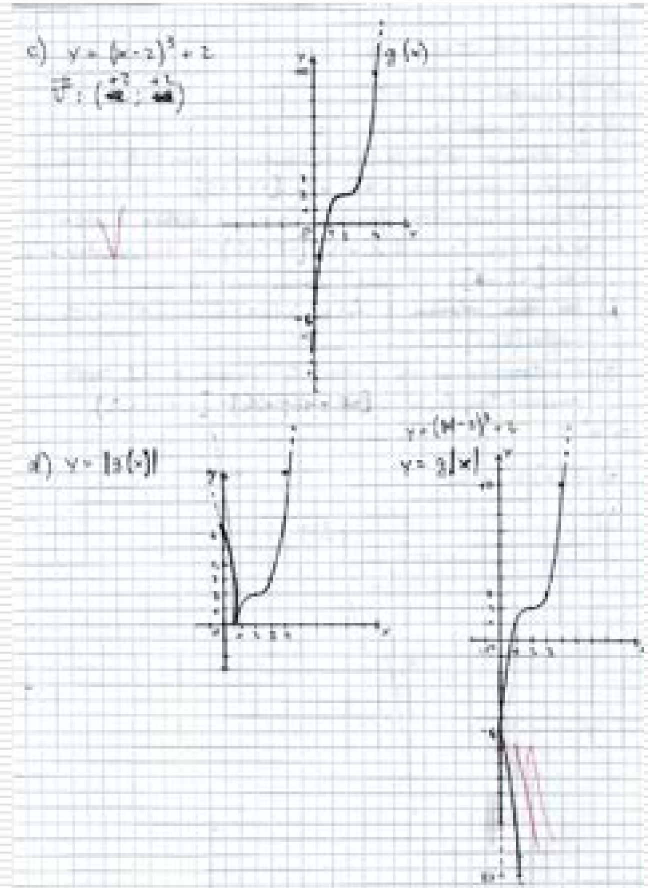




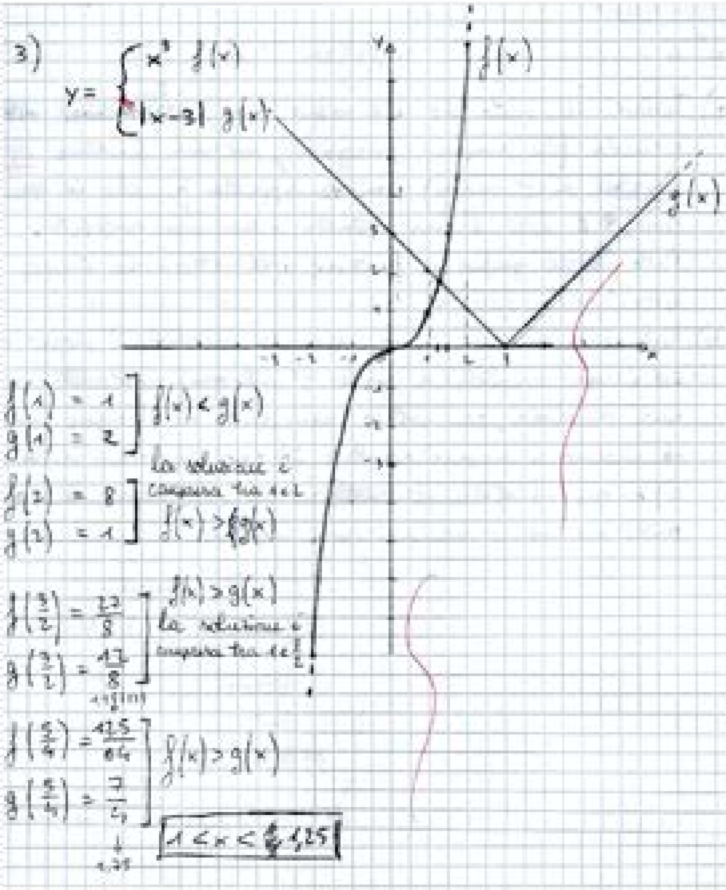
un esempio di svolgimento della verifica (1) eseguito in classe dagli studenti

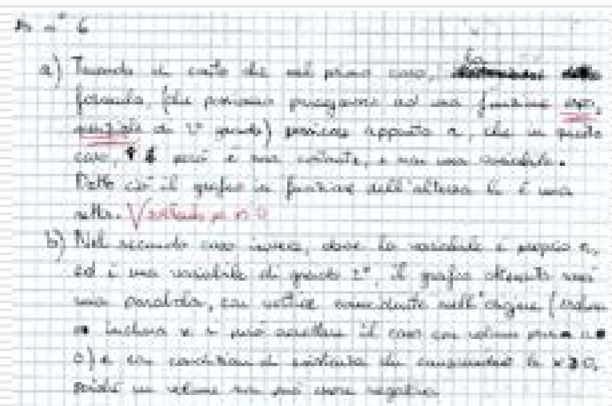


un esempio di svolgimento della verifica (1) eseguito in classe dagli studenti: non sempre la soluzione è corretta



un esempio di svolgimento della verifica (1) eseguito in classe dagli studenti: non sempre la soluzione è corretta





verifica (2)

1. Un orto impegnativo….

Si vuole recintare un orto a forma di triangolo rettangolo in modo che il lato più lungo, esposto a sud, possa contenere le piante che necessitano di pieno sole.

a. Indicando con x, y le misure dei cateti del triangolo, scrivere l’equazione della funzione che esprime y in funzione di x se il lato esposto a sud deve misurare 100 metri e $x<y$.

b. Rappresentare graficamente la funzione ottenuta limitatamente ai limiti geometrici imposti dal problema.

c. L’orto si trova in una zona in cui gli animali potrebbero danneggiare il raccolto pertanto si decide di recintare l’orto, ma abbiamo a disposizione soltanto 240 metri di rete. Quanto devono misurare i cateti del triangolo affinché sia possibile recintare l’orto?

d. La funzione ottenuta al punto b “sembra” un arco di circonferenza, verifica algebricamente che lo è veramente e rappresenta il punto P le cui coordinate sono quelle individuate al punto c.

e. Detta H la proiezione di P sull’asse x, rappresentare il triangolo POH essendo O l’origine del sistema cartesiano di riferimento. Cosa rappresenta il triangolo POH?

f. Di quanta recinzione in più avremmo bisogno decidendo di creare l’orto in modo che i cateti risultino congruenti?

g. Volendo piantare il maggior numero di ortaggi possibile, recinteresti l’orto con le misure ottenute al punto c) o con quelle ottenute al punto f)?

verifica (2)

2. Data la funzione $f(x) = 4x - x^2$

a) rappresentare graficamente la funzione $g(x) = \dfrac{1}{4x - x^2}$

b) individuare il suo asse di simmetria ed eseguire la verifica algebrica

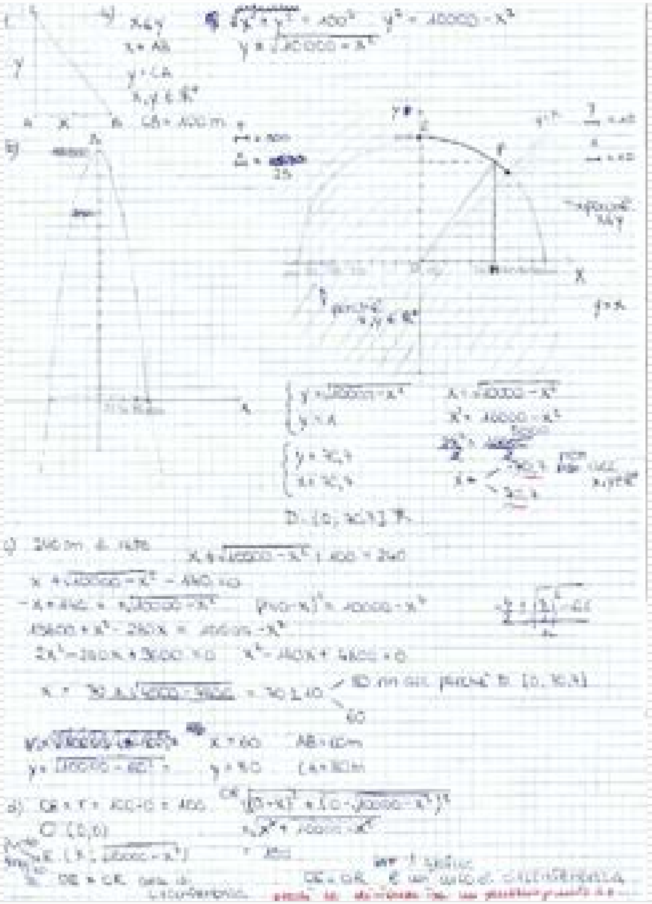
c) risolvere graficamente la disequazione $g(x) \leq 1$

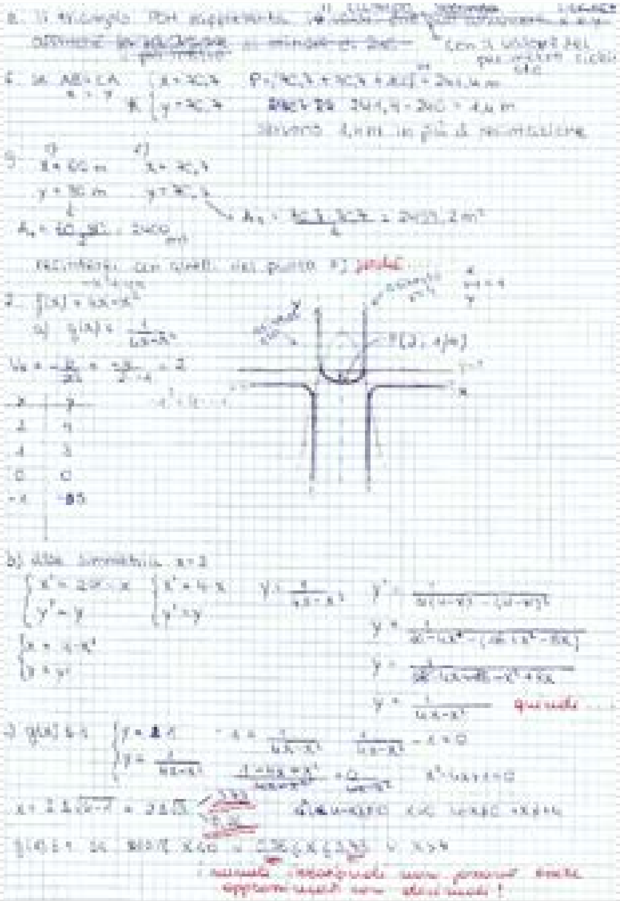
d) determinare dominio e codominio della funzione

e) dire se la funzione g(x) è iniettiva, suriettiva, biiettiva e, nel caso in cui non sia suriettiva, operare una opportuna restrizione degli insiemi tra cui opera la funzione affinché questa diventi suriettiva.

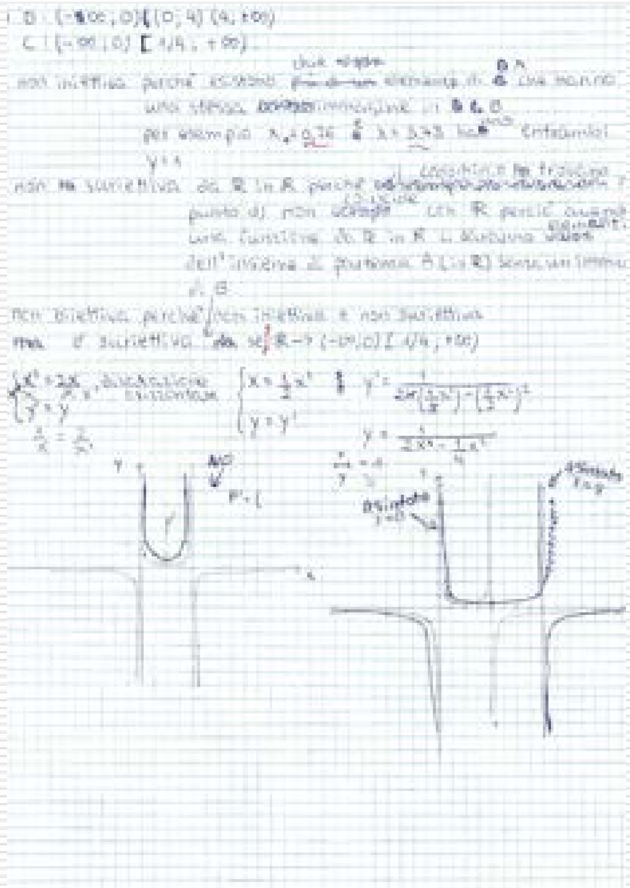
f) applicare alla funzione g(x) la trasformazione $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$ e rappresentare graficamente la funzione ottenuta sfruttando il grafico della funzione g(x).

un esempio di svolgimento della verifica (2) eseguito in classe dagli studenti

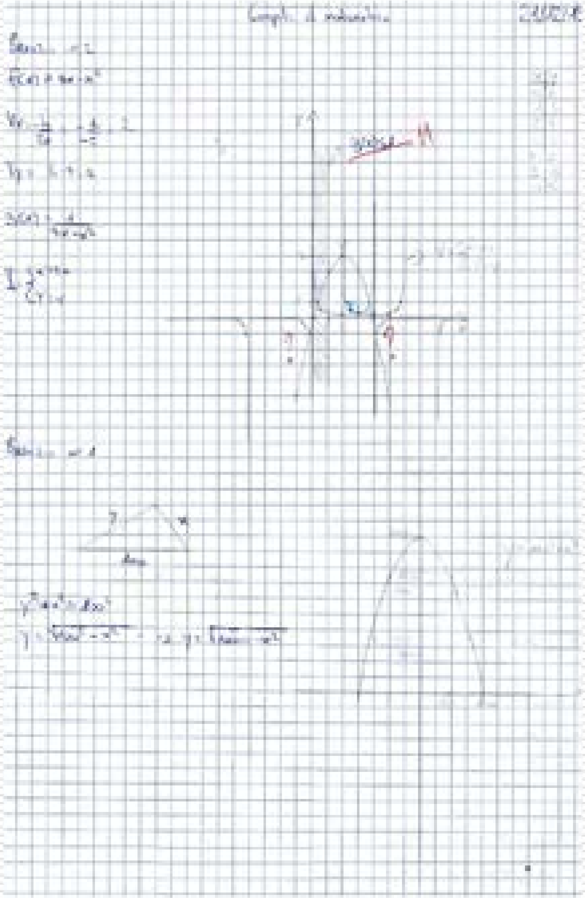


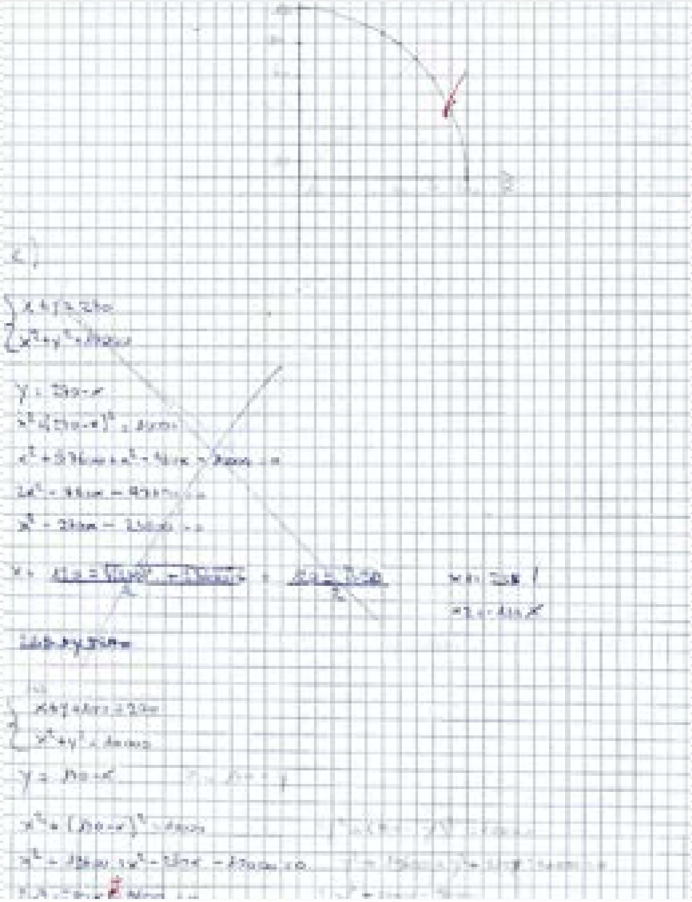


un esempio di svolgimento della verifica (1) eseguito in classe dagli studenti

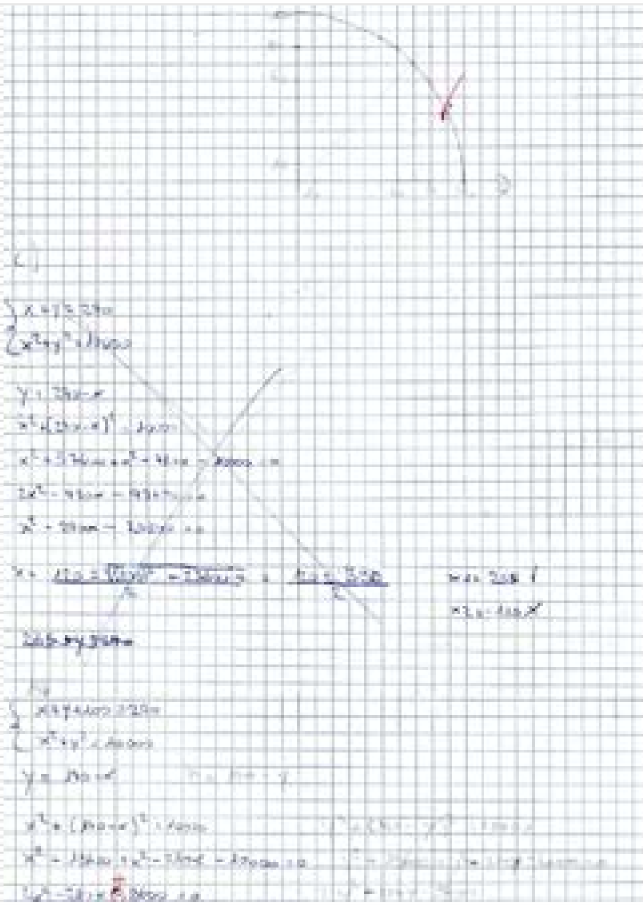


un esempio di svolgimento della verifica (2) eseguito in classe dagli studenti: non sempre la soluzione è corretta





un esempio di svolgimento della verifica (2) eseguito in classe dagli studenti: non sempre la soluzione è corretta



risultati ottenuti

- la grande maggioranza degli studenti è in grado di tracciare, almeno qualitativamente, il grafico di una data funzione e di saperne riconoscere le caratteristiche più significative
- la maggior parte degli studenti riesce ad interpretare correttamente le caratteristiche suddette alla luce di situazioni concrete
- non tutti sono in grado di commentare i risultati ottenuti con l'uso di una terminologia adeguata anche mettendo a confronto più possibili modelli rappresentativi di situazioni concrete

valutazione dell'efficacia del percorso didattico sperimentato

- l'attività svolta ha permesso agli studenti di avere una visione d'insieme delle principali tipologie di funzioni con il vantaggio di evitarne una trattazione "settoriale" e "isolata". Utilizzando anche le trasformazioni geometriche e la composizione tra funzioni è stato possibile "modificarle" e "legarle tra loro" e tutto ciò ha permesso agli studenti di fare propri i concetti di dominio, codominio, monotonia, … confrontando anche i vari grafici tra loro
- i continui riferimenti a situazioni concrete hanno aiutato gli studenti a comprendere al meglio il significato di "variabili" di un problema e dell'insieme numerico al quale possono appartenere, li ha resi più consapevoli del concetto di "dipendenza tra variabili" e li ha portati a valutare in modo piuttosto naturale le condizioni sulle loro limitazioni
- lavorare in questo modo ha permesso di gettare le basi per un successivo sviluppo dei concetti di limite e derivata e di rendere naturale agli studenti l'utilizzo di questo strumento matematico per risolvere problemi relativi alle diverse discipline