REGIONE TOSCANA

LA CIRCONFERENZA

Scuola secondaria di secondo grado
Area disciplinare: matematica
Liceo statale "C. Lorenzini"

Realizzato con il contributo della Regione Toscana
nell’ambito del progetto
Rete Scuole LSS a.s. 2020/2021

Liceo Statale "C. Lorenzini"

Classico, Linguistico, Scientifico, Scienze Umane

Pescia (PT)

LA CIRCONFERENZA

osservare, fare, capire

Classe terza Liceo
indirizzo Scientifico Ordinario

Docente: Sandra Annibali

collocazione del percorso effettuato nel curricolo verticale (1)

Il percorso nasce da una riflessione sulla trattazione della circonferenza nella scuola secondaria di secondo grado: generalmente questa avviene prima nel piano euclideo e, in un secondo momento, nel piano cartesiano. Il percorso che viene proposto utilizza contemporaneamente i due "ambienti di lavoro", continuando quanto iniziato nel prodotto "La prima geometria".

Per questo motivo è stata effettuata la scelta di “rimandare” la trattazione al terzo anno del corso liceale (nello specifico il percorso è stato svolto in una classe terza liceo scientifico ordinario).

collocazione del percorso effettuato nel curricolo verticale (2)

Nella classe terza:

- le conoscenze di geometria analitica (gli studenti conoscono l’equazione della retta e della circonferenza nel piano cartesiano e le sanno utilizzare) hanno permesso di poter presentare gli “oggetti geometrici” sia nel piano cartesiano che in quello euclideo, favorendo uno sviluppo armonico e integrato dei temi previsti nel programma;

- il ragionamento deduttivo è già stato affrontato durante lo studio della geometria nella classe seconda (vedi "La prima geometria") e si è continuato a stimolarlo applicando sempre il principio "osservare, fare, capire".

obiettivi essenziali di apprendimento

- Conoscere e saper utilizzare elementi della geometria euclidea (circonferenza, raggio, arco, corda, rette tangenti …).
- Acquisire un linguaggio corretto e rigoroso nella capacità di esprimersi sia scritta che orale.
- Saper eseguire ragionamenti logici corretti.
- Acquisire progressivamente autonomia nelle dimostrazioni.
- Saper utilizzare i concetti appresi sia nel piano euclideo che in quello cartesiano.

elementi salienti dell'approccio metodologico (1)

Si propone un percorso che permetta di introdurre i concetti e i metodi propri della geometria euclidea e di quella cartesiana.

Gli elementi sono:

- eseguire dimostrazioni in contesti progressivamente più complessi;
- stimolare gli studenti ad analizzare le situazioni proposte;
- analizzare le proprietà della circonferenza eseguendo dimostrazioni sia con i metodi tipici della geometria euclidea che mediante le loro equazioni nel piano cartesiano.

elementi salienti dell’approccio metodologico (2)

Particolare attenzione è stata data all’analisi critica delle dimostrazioni eseguite: in particolare gli studenti sono stati incoraggiati a proporre dimostrazioni anche accettando il fatto che, in una prima stesura, queste potessero contenere degli errori. Molti esercizi sono stati assegnati per casa ma sono stati poi oggetto di discussione collettiva in classe per verificare la correttezza e la chiarezza del ragionamento logico utilizzato. È proprio dalla discussione collettiva che sono emerse le varie criticità spesso dovute all’errata assunzione di ipotesi non contenute nel testo: in una fase iniziale le dimostrazioni ponevano, talvolta, le figure considerate in situazioni «particolari».

Importante, in questa prima fase, è stato non criticare gli errori o le «leggerezze» commesse, ma piuttosto di considerarli come stimoli per individuare il ragionamento corretto; in pratica, si è cercato di convincere gli studenti che soltanto sbagliando si può individuare la strategia corretta!

elementi salienti dell’approccio metodologico (3)

Gli argomenti sono quelli che tradizionalmente si affrontano durante lo studio della circonferenza sia nel piano cartesiano che in quello euclideo, ma diverso è l’approccio con il quale essi sono stati trattati.

Si è partiti dalla costruzione di un "*geopiano*" nel quale poter rappresentare le "situazioni" proposte; dall’osservazione delle figure ottenute sono scaturite delle congetture che sono poi state verificate tramite righello e goniometro. Nel caso in cui le misure eseguite confermassero quanto inizialmente ipotizzato, questo è stata dimostrato sia nel piano euclideo che in quello cartesiano.

materiali, apparecchi e strumenti utilizzati

- Sono state utilizzate varie fonti, da libri di testo, a internet per la ricerca del materiale.
- Computer e LIM per l’utilizzo di software e connessione internet.

ambienti di lavoro in cui è stato sviluppato il percorso

Il percorso è stato svolto interamente in didattica a distanza (DAD) ad eccezione della verifica scritta

- a casa;
- aula virtuale;
- aula scolastica.

tempi impiegati

- Per la messa a punto preliminare nel Gruppo LSS: 5 ore.
- Per la progettazione specifica e dettagliata nella classe e la documentazione: 15 ore.
- Tempo-scuola di sviluppo del percorso: 20 ore, comprensive dell’applicazione ai problemi standard delle proprietà individuate e delle verifiche sia orali che scritta.

altre informazioni

- I vari argomenti sono stati introdotti partendo dall'osservazione delle figure ottenute nel "*geopiano*".
- Il piano euclideo è stato utilizzato parallelamente al piano cartesiano; questo ha permesso di economizzare i tempi di lavoro e di esercitare competenze precedentemente acquisite.
- Le proprietà individuate sono state contemporaneamente applicate a tradizionali problemi sulla circonferenza anche in situazioni reali.
- Di seguito viene riportata una parte del lavoro.

descrizione sintetica dell’attività

- Il “percorso” ha occupato 5 settimane ed è stato proposto con un approccio che coinvolgesse direttamente gli studenti e che stimolasse continuamente un’analisi critica dei problemi affrontati.
- Dopo un’introduzione che facesse riflettere sul fatto che gli ambienti che ci circondano contengono figure geometriche riconducibili al cerchio ed alla circonferenza, sono state visualizzate nel "*geopiano*" le principali proprietà delle corde di una circonferenza.
- Dall’osservazione delle figure ottenute sono scaturite congetture che gli studenti hanno confermato o smentito prima tramite misure con righello e goniometro, poi tramite dimostrazioni nel caso in cui queste fossero state confermate.
- Infine, tutte le proprietà dimostrate sono state assemblate in un file.

argomenti proposti in classe

- In ogni fase dello sviluppo del percorso si è sistematicamente utilizzato un metodo di discussione aperto con la classe, seguito da progressivi livelli di sintesi dei contenuti.

- Tutti i lavori svolti sono stati inviati dagli studenti in formato digitale poiché l’intero percorso è stato svolto in didattica a distanza, ad eccezione della verifica finale effettuata in presenza.

argomenti assegnati e commentati in aula

L’insegnante ha assegnato agli studenti il compito di individuare oggetti, ricercarne le forme geometriche, descriverle, riflettere sul motivo di tali forme (funzionali o decorative?). Quelle che seguono sono alcune delle immagini individuate dai ragazzi, accompagnate dalle loro osservazioni.

Questa è la ruota del mio letto che ha il “contorno" riconducibile a una circonferenza. Questo agevola il movimento quando lo devo rifare al mattino, quindi il suo scopo è funzionale

argomenti assegnati e commentati in aula

Gli anelli del quaderno hanno forma circolare per permettere ai fogli di scorrere agevolmente. Inoltre è la forma più adatta per far si che il quaderno si chiuda bene indipendentemente da quanti fogli ci sono.

Il bordo della tazza ha la forma di una circonferenza permettendoci di bere da qualsiasi lato e senza lati spigolosi

Un bracciale ha la tipica forma di una circonferenza, in questo modo l'accessorio ben si adatta al polso e risulta più comodo mentre lo si indossa.

Al rotolo del nastro adesivo viene data la forma di una circonferenza perché lo scotch sia facilmente prelevabile e non assuma pieghe scomode durante il periodo in cui non viene utilizzato.

argomenti assegnati e commentati in aula

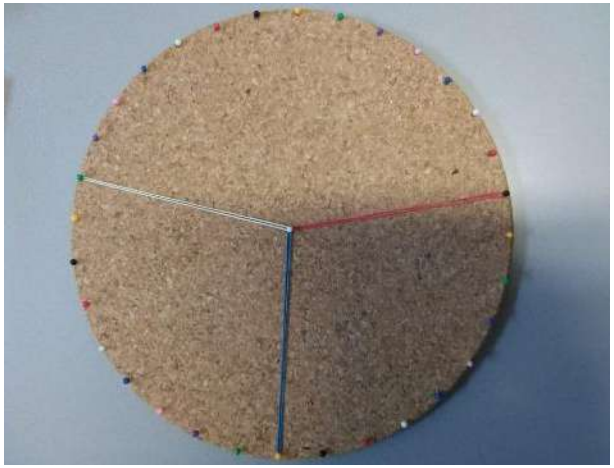
Sfera: bolla di sapone
Le bolle di sapone hanno una forma sferica a causa della tensione superficiale. In questo modo la sfera possiede la minima superficie per un certo volume.

Cerchio:moneta
Probabilmente le monete sono circolari per motivi di fabbricazione e per comodità nel maneggiarle.

Circonferenza:volante
Il volante ha una forma circolare probabilmente per comodità nell'utilizzo.

argomenti assegnati per casa

L'insegnante ha assegnato agli studenti il compito di costruire un "*geopiano*" di forma circolare e rappresentare su di esso gli elementi indicati fornendone le relative definizioni ….

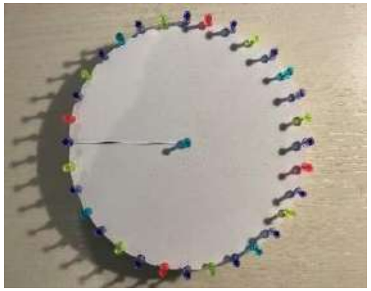


- **DIAMETRO:** …….
- **CORDA:** ………
- **ARCO:** ………
- **ANGOLO AL CENTRO:** ………
- **ANGOLO ALLA CIRCONFERENZA:** …….
- **SETTORE CIRCOLARE:** ………
- **SEGMENTO CIRCOLARE (A UNA BASE):** ………
- **SEGMENTO CIRCOLARE (A DUE BASI):** ………..

presentazione alla classe dei lavori inviati da alcuni studenti (1)

DEFINIZIONI:

• **RAGGIO:** **segmento che ha un estremo sulla circonferenza e un estremo sul suo centro.**

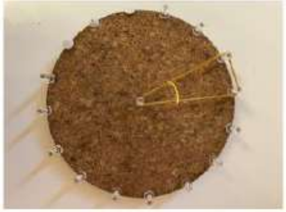


• **CORDA**: “Segmento che unisce due punti distinti di una circonferenza”

presentazione alla classe dei lavori inviati da alcuni studenti (2)

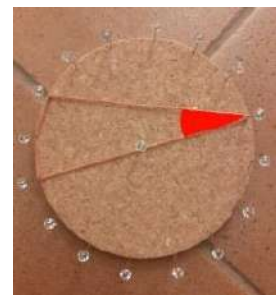
DIAMETRO: segmento che passa per il centro e che unisce due punti delle circonferenza (corda di massima lunghezza).

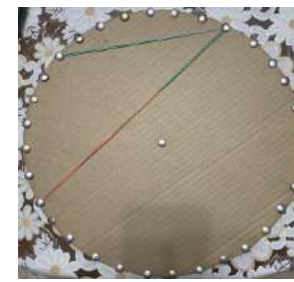
ANGOLO AL CENTRO: Un angolo al centro è un angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza.



presentazione alla classe dei lavori inviati da alcuni studenti (3)

ANGOLO ALLA CIRCONFERENZA: ogni angolo convesso il cui vertice appartiene alla circonferenza e i cui lati sono secanti la circonferenza, o uno secante e l'altro tangente





ARCO: parte della circonferenza compresa tra due punti.

presentazione alla classe dei lavori inviati da alcuni studenti (4)

Settore circolare:

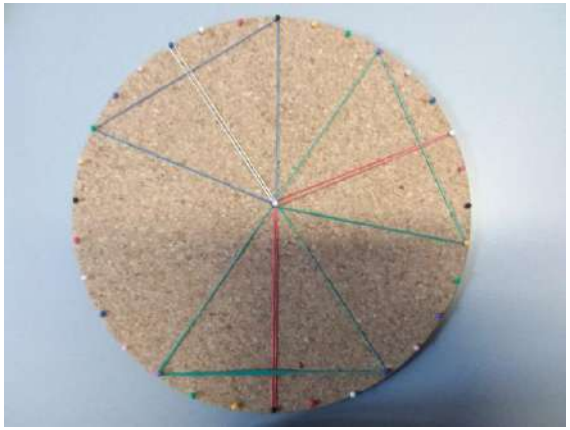
Porzione di cerchio delimitata da due raggi della circonferenza e dall'arco che questi formano su essa.

SEGMENTO CIRCOLARE (A UNA BASE):
parte di cerchio delimitata da una corda

SEGMENTO CIRCOLARE (A DUE BASI): "Parte di cerchio compresa tra due corde parallele e gli archi che congiungono gli estremi delle due corde"

argomenti assegnati per casa (1)

… è stato poi chiesto di formulare congetture ed eseguire dimostrazioni:



PROPRIETÀ DELLE CORDE CONGRUENTI 1

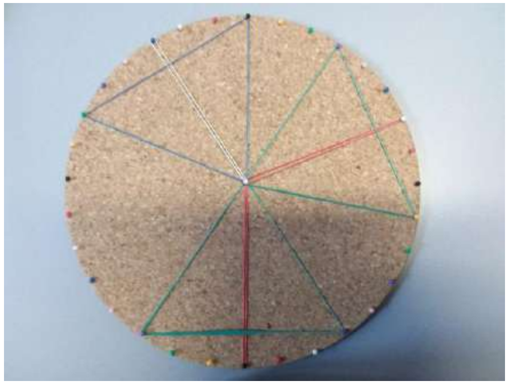
1) Posiziona sulla circonferenza corde congruenti.
2) Posiziona un raggio perpendicolare a ciascuna corda.

Osserva i segmenti ottenuti. Quali congetture puoi formulare?
1) ….
2) ….
3) ….

Esegui le opportune misure che possano confermare o smentire empiricamente le congetture formulate; riportale in modo chiaro e deduci la conferma o la smentita delle congetture stesse.

Utilizzando deduzioni logiche prova ad eseguire una dimostrazione delle congetture che siano state confermate dalle misure precedenti.
(Per la dimostrazione puoi utilizzare come "ambiente di lavoro" sia il piano euclideo che il piano cartesiano).

argomenti assegnati per casa (2)



PROPRIETÀ DELLE CORDE CONGRUENTI 2

1) Posiziona sulla circonferenza corde congruenti.
2) Posiziona un raggio in modo che intersechi la corda nel suo punto medio.

Osserva i segmenti ottenuti. Quali congetture puoi formulare?
1) ….
2) ….
3) ….

Esegui le opportune misure che possano confermare o smentire empiricamente le congetture formulate; riportale in modo chiaro e deduci la conferma o la smentita delle congetture stesse.

Utilizzando deduzioni logiche prova ad eseguire una dimostrazione delle congetture che siano state confermate dalle misure precedenti.
(Per la dimostrazione puoi utilizzare come "ambiente di lavoro" sia il piano euclideo che il piano cartesiano).

presentazione alla classe del materiale inviato da alcuni studenti

Sono state presentate alla classe le congetture e le dimostrazioni inviate dagli studenti.

Alcuni non hanno individuato proprietà corrette perché hanno erroneamente considerato casi particolari; tra coloro che hanno individuato enunciati corretti, alcuni hanno commesso errori nel ragionamento logico – deduttivo.

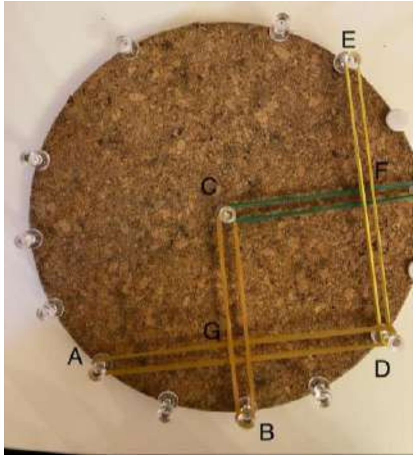
La discussione è iniziata analizzando le prime in modo da stimolare un’analisi critica delle proprietà formulate; sotto la guida dell’insegnate gli studenti sono riusciti ad individuare gli errori commessi e hanno scartato quelle errate.

Successivamente sono state analizzate alcune dimostrazioni di congetture considerate corrette; anche in questo caso alcune contenevano errori e la procedura della discussione con gli studenti è stata analoga alla precedente.

In questo modo di procedere è stato continuamente ricordato agli studenti che le discussioni effettuate non volevano essere una critica agli errori commessi, bensì un prezioso momento di riflessione. D’altronde, molte delle dimostrazioni presenti nei manuali di matematica sono frutto di errori, correzioni e carteggi spesso protrattesi nel tempo.

presentazione alla classe del materiale inviato da alcuni studenti (1)

(esempio di congetture errate 1.1)



PROPRIETÀ DELLE CORDE CONGRUENTI 1

1) Posiziona sulla circonferenza corde congruenti.
2) Posiziona un raggio perpendicolare a ciascuna corda.

Osserva i segmenti ottenuti. Quali congetture puoi formulare?

1) Il quadrilatero CFDG è un quadrato.

2) L'angolo al centro $G\hat{C}F$ è congruente all'angolo alla circonferenza $G\widehat{D}F$.

3) I raggi dividono le corde in due segmenti uguali.

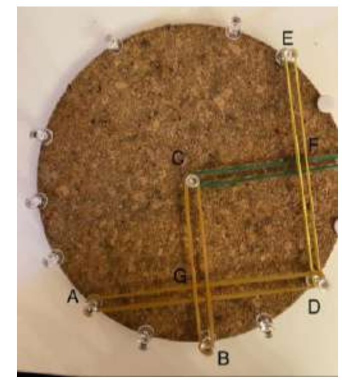
4) La corda AD e la corda ED individuano 2 segmenti circolari congruenti.

Alcuni studenti hanno subito individuato gli errori contenuti nelle prime due congetture perché riferite al caso particolare in cui le corde sono tra loro perpendicolari.

presentazione alla classe del materiale inviato da alcuni studenti (1)

(esempio di congetture errate 1.2)

Esegui le opportune misure che possano confermare o smentire empiricamente le congetture formulate, riportale in modo chiaro e deduci la conferma o la smentita delle congetture stessa.



1) CG=7 cm, GD= 7 cm, CF=7 cm, FD=7 cm. $C\hat{G}D$ e $C\hat{F}G$ sono angoli di 90° per ipotesi. $G\hat{C}F$ e $F\widehat{D}G$ hanno un'ampiezza di 90°.
Essendo tutti i lati del quadrilatero e tutti gli angoli congruenti, si può confermare che sia un quadrato.

2) $G\hat{C}F$ e $F\widehat{D}G$ hanno un'ampiezza di 90°. Essendo rispettivamente angolo al centro e angolo alla circonferenza si può affermare che siano congruenti.

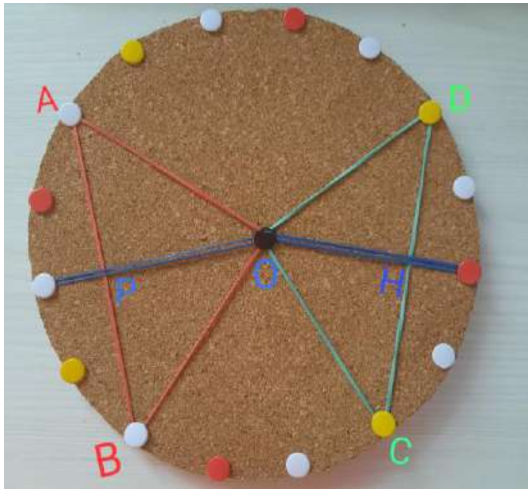
3) Il segmento AD misura 13 cm. AG misura 6,5 cm. GD misura 6,5 cm. Essendo la misura di AG≡GD, è confermato che il raggio CB divide la corda in due segmenti della stessa misura. Il segmento ED misura 13 cm. FD misura 6,5 cm. FE misura 6,5 cm. Essendo la misura di FD≡FE, è confermato che il raggio CB divide la corda in due segmenti della stessa misura.

4) La corda AD di 13 cm è congruente alla corda DE, avente la stessa lunghezza per ipotesi. Essendo la distanza lineare la medesima e appartenendo alla stessa circonferenza, l'arco corrispettivo di AD e quello di DE avranno la stessa misura. Dunque, il segmento circolare avrà la stessa area.

presentazione alla classe del materiale inviato da alcuni studenti (1)

(esempio di congetture corrette 1.3)

Talvolta le proprietà individuate sono corrette …



PROPRIETÀ DELLE CORDE CONGRUENTI 2

3) Posiziona sulla circonferenza corde congruenti.
4) Posiziona un raggio in modo che intersechi la corda nel suo punto medio

Osserva i segmenti ottenuti. Quali congetture puoi formulare?

1) la distanza tra le corde congruenti e il centro è la stessa
2) OP è perpendicolare ad AB e OH è perpendicolare a CD

Esegui le opportune misure che possano confermare o smentire empiricamente le congetture formulate, riportale in modo chiaro e deduci la conferma o la smentita delle congetture stessa.

Utilizzando un righello misuro la distanza tra il centro e il punto di intersezione tra il raggio e la corda AB successivamente eseguo la stessa operazione con la corda CD. Entrambe le misure sono 6,5 cm quindi confermo la congettura. Per confermare o smentire che i raggi sono perpendicolari alle corde misuro gli angoli con un goniometro.

presentazione alla classe del materiale inviato da alcuni studenti (1)

(esempio di dimostrazione errata 1.4)

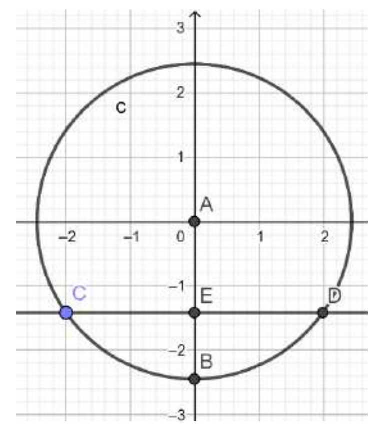
… ma la dimostrazione è errata:

Il raggio AB, che interseca la corda nel suo punto medio, è anche perpendicolare ad essa corda.

Riferiamo la figura ad un sistema di assi cartesiani ortogonali x e y aventi l'origine nel centro della circonferenza e con l'asse y coincidente con il raggio mediana della corda.

Possiamo ruotare la figura disponendo gli assi orizzontalmente e verticalmente.

In questo riferimento cartesiano: B (0; -r), γ) $x^2+y^2=r^2$.



Ipotesi: AB è mediana di CD. Tesi: AB $\perp$ CD.

Il segmento AB giace sull'asse cartesiano y, per cui l'equazione del segmento è x = 0, $-r \leq x \leq r$.

Per risultare perpendicolare al segmento AB, CD deve avere equazione y = k

$C(-x_1; k)$ $D(x_1;k)$ $m_{CD} = (k - k)/(x_1 - x_1) = 0$

$y-y_o=m_{CD}(x-x_1)$ $y-k=0(x-x_1) \rightarrow y=k$

È stato verificato che il segmento CD giace su una retta di equazione y = k per cui risulta $\perp$ alla corda CD.

presentazione alla classe del materiale inviato da alcuni studenti (1)

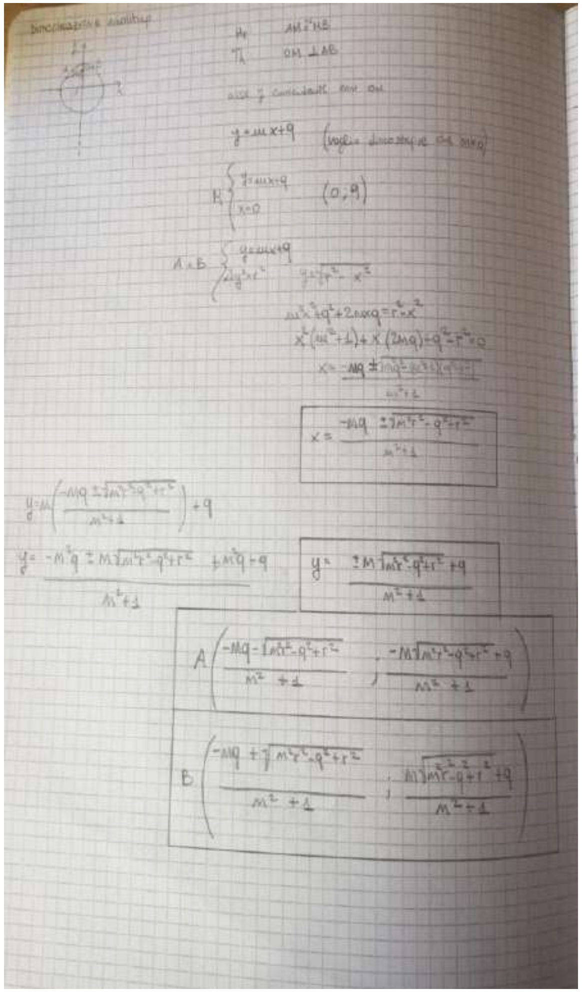
(esempio di dimostrazione errata 1.5)

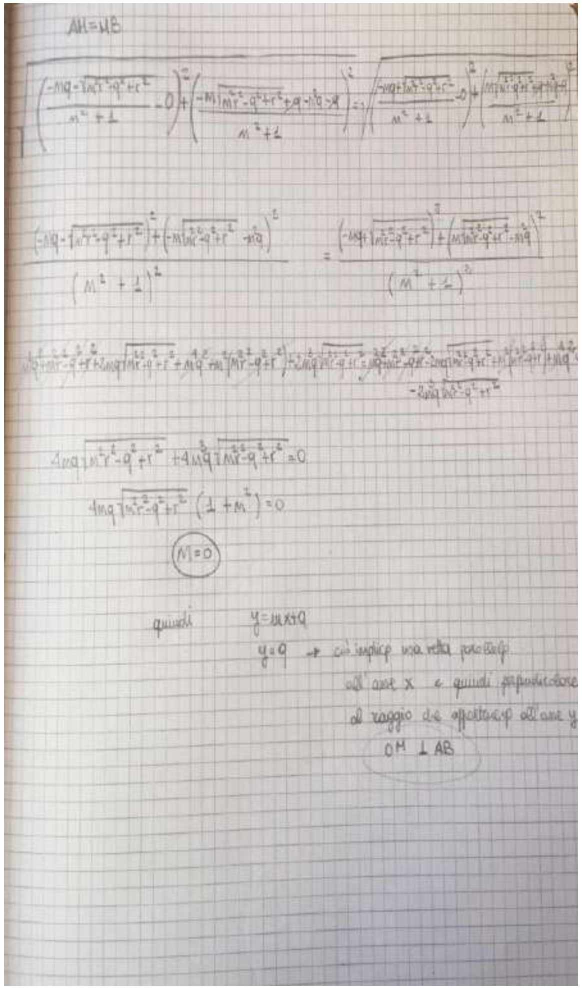
La correzione del ragionamento logico-deduttivo errato, presentato nella slide precedente, ha richiesto un’analisi più accurata e dettagliata del problema rispetto alla correzione degli errori commessi nelle congetture:

soltanto alcuni studenti hanno individuato rapidamente l’errore commesso notando che la tesi della dimostrazione era stata assunta come ipotesi, per altri è stato necessario un intervento più incisivo da parte del docente.

presentazione alla classe del materiale inviato da alcuni studenti (2)

(esempio di dimostrazione "quasi" corretta 2.1)





presentazione alla classe del materiale inviato da alcuni studenti (2)

(correzione degli errori 2.2)

La correzione, o meglio il completamento, di quest'ultima dimostrazione ha richiesto maggiormente (rispetto ai casi precedenti) la guida da parte dell'insegnante:

la scelta del sistema di riferimento e il suo «posizionamento» rispetto alla circonferenza è stato dato praticamente per scontato dagli studenti.

È stato quindi necessario eseguire un'accurata riflessione dalla quale emergesse non soltanto che il posizionamento degli assi cartesiani non è «automatico» e può essere diverso in dimostrazioni differenti, ma anche che talvolta scelte non opportune possono avere pesanti ripercussioni sui calcoli algebrici.

Il problema è emerso in modo più evidente nelle dimostrazioni delle proprietà delle rette tangenti che vengono presentate successivamente.

Materiale prodotto dagli studenti

Il lavoro è continuato con le stesse modalità (lavoro a casa - commento in classe - correzione degli errori - riformulazione corretta di enunciati e dimostrazioni) in modo da ottenere tutte le principali proprietà delle corde e delle rette tangenti ad una circonferenza.

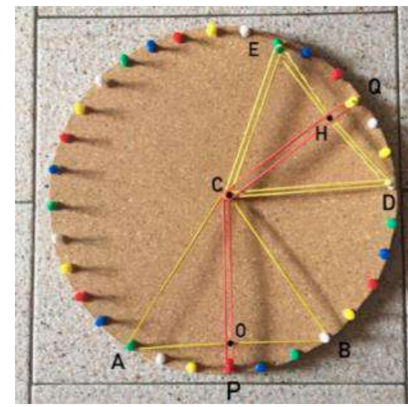
Tutte le dimostrazioni sono state eseguite sia nel piano euclideo che in quello cartesiano.

Una parte del materiale rielaborato e corretto è riportata di seguito.

Materiale prodotto dagli studenti (1)

(esempio di rielaborazione del lavoro svolto assieme agli studenti 1,1)

"Un raggio condotto perpendicolarmente ad una corda la divide in due parti congruenti ed è bisettrice dell'angolo al centro che sottende la corda"



Ipotesi: *AB* corda $\quad CP \perp AB$

Tesi: 1) $AO \cong OB$
2) $A\hat{C}O \cong B\hat{C}O$

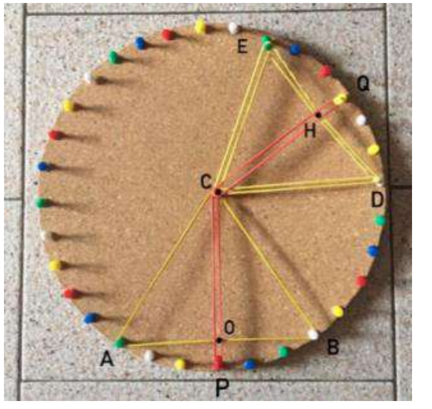
DIMOSTRAZIONE 1

Tesi 2. Il triangolo *ABC* è isoscele, perché i lati *AC* e *BC* sono due raggi ($AC \cong BC$), perciò gli angoli alla base sono congruenti ($C\hat{A}O \cong C\hat{B}O$). Il segmento *CO* è comune ed è altezza, in quanto $AB \perp CP$ per ipotesi; di conseguenza $A\hat{O}C = B\hat{O}C = 90°$.
Considerando i due triangoli *AOC* e *BOC* e il fatto che la somma degli angoli interni a un triangolo deve essere 180°, allora $A\hat{C}O \cong B\hat{C}O$. Ciò dimostra che il raggio è bisettrice dell'angolo al centro.

Tesi 1. Analogamente a quanto dimostrato precedentemente so che $A\hat{O}C \cong B\hat{O}C$, $A\hat{C}O \cong B\hat{C}O$ e *CP* comune, quindi posso dire che, per il secondo criterio di congruenza dei triangoli, i triangoli *AOC* e *BOC* sono congruenti. In particolare, $AO \cong OB$, il che tradotto in parole significa che il raggio è mediana della corda.

Materiale prodotto dagli studenti (1)

(esempio di rielaborazione del lavoro svolto assieme agli studenti 1.2)



Ipotesi : *AB* corda $\qquad CP \perp AB$

Tesi: 1) $AO \cong OB$
2) $A\hat{C}O \cong B\hat{C}O$

DIMOSTRAZIONE 2

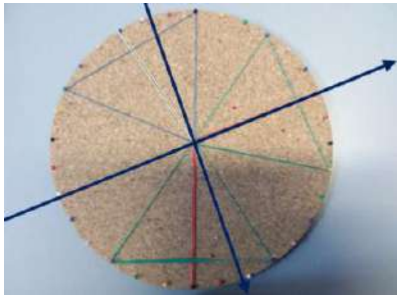
Tesi 1. Osservo che il triangolo formato dalla corda e dai due raggi che uniscono il centro con gli estremi della corda è isoscele su base coincidente con la corda, dato che i due raggi sono congruenti. Il raggio perpendicolare alla corda ha un estremo nell’angolo compreso tra i due lati congruenti del triangolo isoscele, perciò tale raggio comprende un’altezza del triangolo isoscele. Essa è l’altezza relativa alla base del triangolo isoscele, perciò è anche mediana della base, cioè della corda.

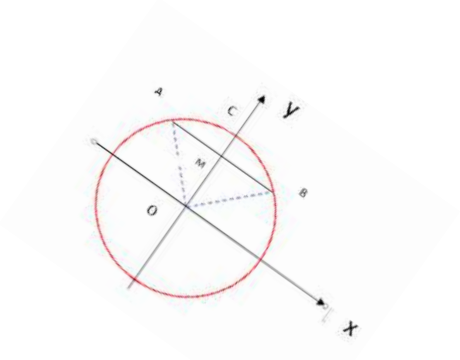
Tesi 2. Dato che la mediana della base di un triangolo isoscele è anche bisettrice dell’angolo opposto alla base, il raggio, essendo mediana della corda, è bisettrice dell’angolo opposto alla corda, cioè è bisettrice dell’angolo al centro formato dai due raggi che uniscono il centro con gli estremi della corda.

Materiale prodotto dagli studenti (1)

(esempio di rielaborazione del lavoro svolto assieme agli studenti 1.3)

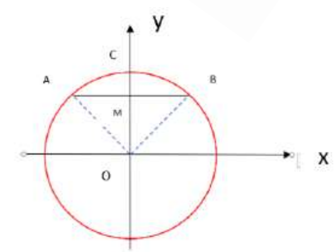
DIMOSTRAZIONE 3 (piano cartesiano)





Riferiamo la figura ad un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy aventi l’origine nel centro della circonferenza e con l’asse y coincidente con il raggio perpendicolare alla corda.

Possiamo ruotare la figura disponendo gli assi orizzontalmente e verticalmente.
In questo riferimento cartesiano: $C(0;r)$ γ) $x^2+y^2=r^2$.
Ipotesi: OC ⊥ AB Tesi: AM ≅ MB.



La retta AB risulta perpendicolare al raggio OC e quindi all’asse delle ordinate, pertanto risulta parallela all’asse delle ascisse e ha equazione

$y=k$ con $0<k<r$

Intersecando la retta e la circonferenza otteniamo:

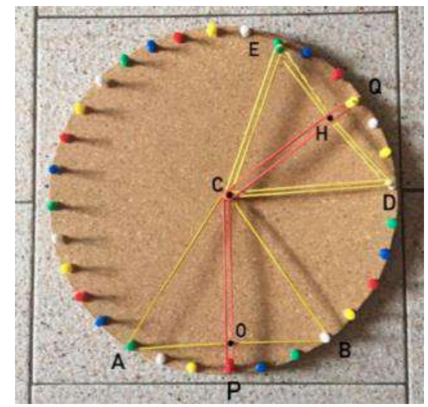
$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ y=k \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x=\pm\sqrt{r^2-k^2} \\ y=k \end{cases}$ quindi $B\left(+\sqrt{r^2-k^2};k\right)$ A $\left(-\sqrt{r^2-k^2};k\right)$

Il punto di intersezione tra il raggio OC e la corda AB è M $(0;k)$ pertanto si ha che AM $=\sqrt{r^2-k^2}$
MB $=\sqrt{r^2-k^2}$ $quindi$ AM ≅ MB.

Materiale prodotto dagli studenti (2)

(esempio di rielaborazione del lavoro svolto assieme agli studenti 2.1)

"Un raggio che passa per il punto medio di una corda è perpendicolare alla corda stessa (e quindi è bisettrice dell'angolo al centro che sottende la corda)"



Ipotesi: *AB* corda $AO \cong OB$ Tesi: $OC \perp AB$

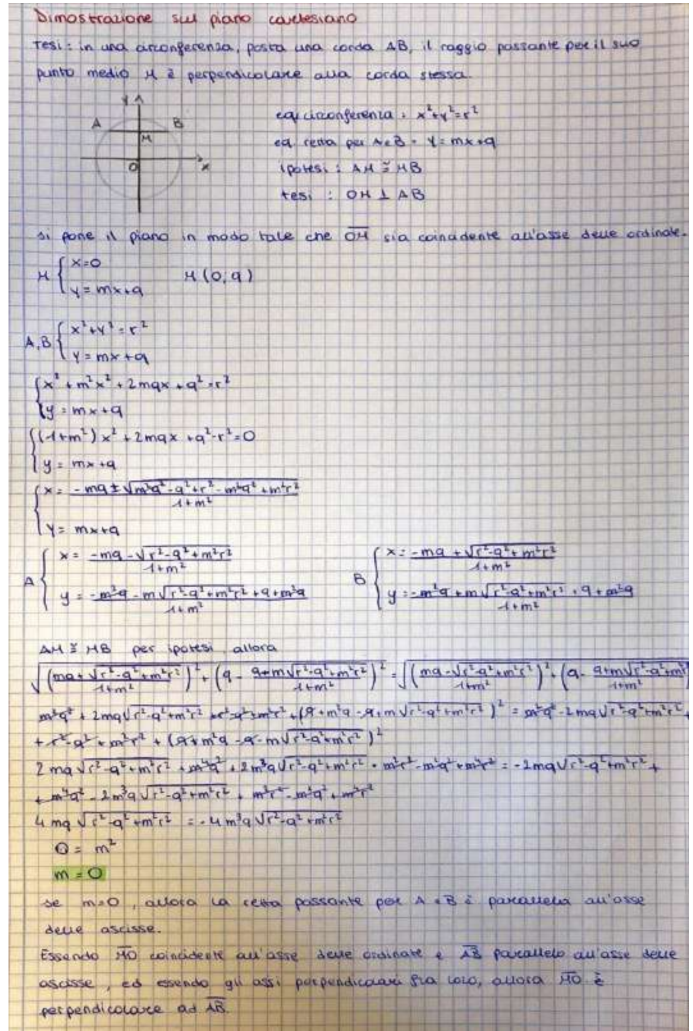
DIMOSTRAZIONE 1

Considerando i due triangoli *AOC* e *BOC*, so che $AO \cong OB$ per ipotesi, *CO* comune e $AC \cong BC$ in quanto raggi. Quindi per il terzo criterio di congruenza dei triangoli, $AOC \cong OBC$. In particolare, $A\hat{O}C = B\hat{O}C = 90°$, perciò il raggio è anche perpendicolare alla corda.

Materiale prodotto dagli studenti (2)

(esempio di rielaborazione del lavoro svolto assieme agli studenti 2.2)

DIMOSTRAZIONE 2



Dimostrazione sul piano cartesiano

Tesi: in una circonferenza, posta una corda AB, il raggio passante per il suo punto medio M è perpendicolare alla corda stessa.

eq. circonferenza: $x^2+y^2=r^2$

eq. retta per A e B: $y=mx+q$

ipotesi: $AM \cong MB$

tesi: $OM \perp AB$

si pone il piano in modo tale che $\overline{OM}$ sia coincidente all'asse delle ordinate.

$$M \begin{cases} x=0 \\ y=mx+q \end{cases} \qquad M(0;q)$$

$$A,B \begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ y=mx+q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+m^2x^2+2mqx+q^2=r^2 \\ y=mx+q \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+m^2)x^2+2mqx+q^2-r^2=0 \\ y=mx+q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-mq\pm\sqrt{m^2q^2-q^2+r^2-m^2q^2+m^2r^2}}{1+m^2} \\ y=mx+q \end{cases}$$

$$A \begin{cases} x=\dfrac{-mq-\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2}}{1+m^2} \\ y=\dfrac{-m^2q-m\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2}+q+m^2q}{1+m^2} \end{cases} \qquad B \begin{cases} x=\dfrac{-mq+\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2}}{1+m^2} \\ y=\dfrac{-m^2q+m\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2}+q+m^2q}{1+m^2} \end{cases}$$

$AM \cong MB$ per ipotesi allora

$$\sqrt{\left(\frac{mq+\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2}}{1+m^2}\right)^2+\left(q-\frac{q+m\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2}}{1+m^2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{mq-\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2}}{1+m^2}\right)^2+\left(q-\frac{q+m\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2}}{1+m^2}\right)^2}$$

$$m^2q^2+2mq\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2}+\cancel{r^2-q^2+m^2r^2}+(\cancel{q}+m^2q-\cancel{q}+m\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2})^2=m^2q^2-2mq\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2}+$$
$$+\cancel{r^2-q^2+m^2r^2}+(\cancel{q}+m^2q-\cancel{q}-m\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2})^2$$

$$2mq\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2}+m^4q^2+2m^3q\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2}+m^2r^2-m^2q^2+m^4r^2=-2mq\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2}+$$
$$+m^4q^2-2m^3q\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2}+m^2r^2-m^2q^2+m^4r^2$$

$$4mq\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2}=-4m^3q\sqrt{r^2-q^2+m^2r^2}$$

$$0=m^2$$

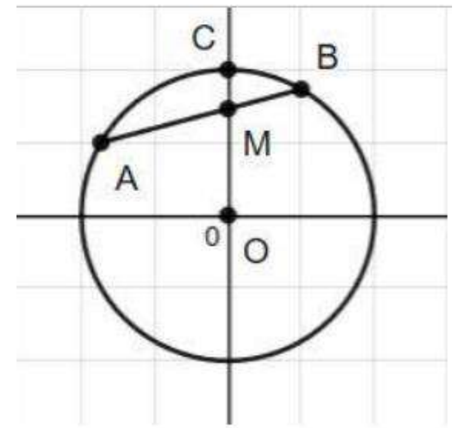
$$m=0$$

se $m=0$, allora la retta passante per A e B è parallela all'asse delle ascisse.

Essendo $\overline{MO}$ coincidente all'asse delle ordinate e $\overline{AB}$ parallelo all'asse delle ascisse, ed essendo gli assi perpendicolari fra loro, allora $\overline{MO}$ è perpendicolare ad $\overline{AB}$.

Materiale prodotto dagli studenti (2)

(esempio di rielaborazione del lavoro svolto assieme agli studenti 2.3)



DIMOSTRAZIONE 3

Ipotesi: $AM \cong MB$

Tesi: $OC \perp AB$.

Dimostrazione:

La circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 = r^2$.

Dato che M è punto medio di AB, $\frac{x_A+x_B}{2} = x_M$ e $\frac{y_A+y_B}{2} = y_M$. M appartiene all'asse y, perciò ha coordinate (0, k).

Da $\frac{x_A+x_B}{2} = 0$ segue $x_A = -x_B$. Dato che A e B appartengono alla circonferenza, e in particolare alla semicirconferenza con ordinate positive:

$$y_A = \sqrt{r^2 - {x_A}^2}$$

$$y_B = \sqrt{r^2 - {x_B}^2}$$

Dato che $x_A = -x_B$, $y_A = y_B$, quindi $(y_A - y_B)/(x_A - x_B) = 0$, cioè la retta che contiene AB è parallela all'asse x e perpendicolare al raggio OC.

argomenti assegnati per casa

(proprietà delle rette tangenti)

Sono poi state analizzate altre proprietà anche relative alle rette tangenti a una circonferenza e, in particolare:

“Una retta t tangente ad una circonferenza γ di centro O in un suo punto A è perpendicolare al raggio OA”

ha permesso una ulteriore riflessione sulla scelta del posizionamento degli assi cartesiani.

La prima che viene riportata è la dimostrazione eseguita da uno studente e presentata al resto della classe.

Il dibattito successivo riguardo alla "convenienza" del sistema di riferimento scelto ha condotto lo stesso autore della dimostrazione a concludere che, se l’asse delle ordinate passasse per il punto A (oltre che per il centro della circonferenza), sicuramente lo svolgimento sarebbe risultato più agevole.

È stato allora chiesto di eseguire nuovamente la dimostrazione.

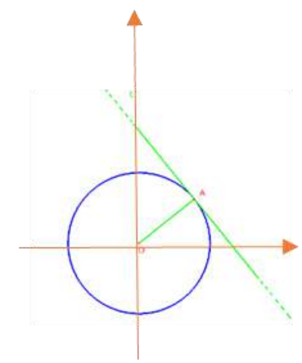
Di seguito vengono riportati entrambi gli svolgimenti.

Materiale prodotto dagli studenti (3)

(esempio di rielaborazione del lavoro svolto assieme agli studenti 3.1)

Teorema:

“Una retta t tangente ad una circonferenza γ di centro O in un suo punto A è perpendicolare al raggio OA”



Ipotesi: retta t tangente alla circonferenza γ.
Tesi: retta t perpendicolare al raggio OA.

DIMOSTRAZIONE

Si pone il piano cartesiano in modo tale che l’origine O degli assi coincida con il centro della circonferenza γ, cosicché questa abbia equazione: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$.

Si esplicita y dall’equazione della circonferenza, considerando la semicirconferenza con le $y \geq 0$: $\mathbf{y} = \boldsymbol{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

Essendo A un punto appartenente alla semicirconferenza di γ presa in esame, ha coordinate: $\mathbf{A}\ \boldsymbol{(x_0;\sqrt{r^2 - x_0^2})}$.

Dato che la retta t passa per il punto A, la sua equazione sarà:

$$y - \sqrt{r^2 - x_0^2} = m_t\,(x - x_0) \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{y = m_t x + m_t x_0 + \sqrt{r^2 - x_0^2}}.$$

Materiale prodotto dagli studenti (3)

(esempio di rielaborazione del lavoro svolto assieme agli studenti 3.2)

Per ipotesi la retta t è tangente alla circonferenza γ, allora:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = m_t x + m_t x_0 + \sqrt{r^2 - {x_0}^2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad x^2 + \left(m_t x - m_t x_0 + \sqrt{r^2 - {x_0}^2}\right)^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + {m_t}^2 x^2 + {m_t}^2 {x_0}^2 + r^2 - {x_0}^2 - 2{m_t}^2 x_0 x + 2 m_t x \sqrt{r^2 - {x_0}^2} - 2 m_t x_0 \sqrt{r^2 - {x_0}^2} - r^2 = 0$$

$$(1 + {m_t}^2) x^2 + 2\left(m_t \sqrt{r^2 - {x_0}^2} - {m_t}^2 x_0\right) x + {m_t}^2 {x_0}^2 - {x_0}^2 - 2 m_t x_0 \sqrt{r^2 - {x_0}^2} = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(m_t \sqrt{r^2 - {x_0}^2} - {m_t}^2 x_0\right)^2 - (1 + {m_t}^2)\left({m_t}^2 {x_0}^2 - {x_0}^2 - 2 m_t x_0 \sqrt{r^2 - {x_0}^2}\right) = 0$$

$${m_t}^2 r^2 - {m_t}^2 {x_0}^2 + \cancel{{m_t}^4 {x_0}^2} - \cancel{2{m_t}^3 x_0 \sqrt{r^2 - {x_0}^2}} - \cancel{{m_t}^2 {x_0}^2} + {x_0}^2 + 2 m_t x_0 \sqrt{r^2 - {x_0}^2} - \cancel{{m_t}^4 {x_0}^2} + \cancel{{m_t}^2 {x_0}^2} + \cancel{2{m_t}^3 x_0 \sqrt{r^2 - {x_0}^2}} = 0$$

$$(r^2 - {x_0}^2){m_t}^2 + 2 x_0 \sqrt{r^2 - {x_0}^2}\, m_t + {x_0}^2 = 0 \quad \rightarrow \quad m_t = \frac{-x_0\sqrt{r^2 - {x_0}^2} \pm \sqrt{\cancel{{x_0}^2 r^2} - \cancel{{x_0}^4} - \cancel{{x_0}^2 r^2} + \cancel{{x_0}^4}}}{r^2 - {x_0}^2}$$

$$\boldsymbol{m_t = -\frac{x_0}{\sqrt{r^2 - {x_0}^2}}}$$

Materiale prodotto dagli studenti (3)

(esempio di rielaborazione del lavoro svolto assieme agli studenti 3.3)

Perché la retta t sia perpendicolare a OA, il coefficiente angolare di t deve essere l'opposto reciproco di quello della retta su cui giace OA, che, essendo una retta passante per i punti O (0 ; 0) e A $(x_0 ; \sqrt{r^2 - x_0^2})$, avrà coefficiente angolare

$$\boldsymbol{m_{OA}} = \frac{\sqrt{r^2 - x_0^2} - 0}{x_0 - 0} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{r^2 - x_0^2}}}{\boldsymbol{x_0}}$$

che è esattamente l'opposto reciproco del coefficiente angolare della retta t.

Ne consegue che <u>una retta t tangente a una circonferenza γ di centro O in un suo punto A è perpendicolare al raggio OA</u>.

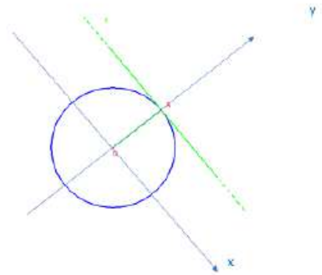
Materiale prodotto dagli studenti (3)

(esempio di rielaborazione del lavoro svolto assieme agli studenti 3.4)

DIMOSTRAZIONE 2

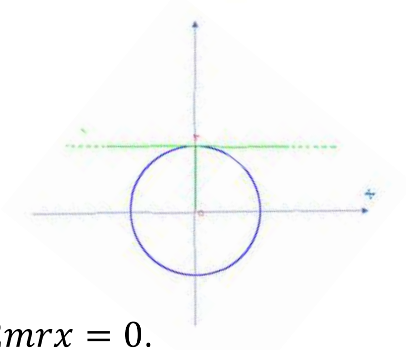
Riferiamo la figura ad un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy avente l'origine nel punto O e con l'asse y passante per A (fig. 1).

fig. 1



Posiamo ruotare la figura disponendo gli assi orizzontalmente e verticalmente (fig. 2).

fig. 2



In questo riferimento cartesiano: $A(0;r)$ $\quad \gamma)\ x^2+y^2=r^2$

Determiniamo l'equazione della retta tangente in A: fascio di rette per A: $y=mx+r$,

intersezione fascio-circonferenza: $\begin{cases} y=mx+r \\ x^2+y^2=r^2 \end{cases}$ da cui: $(1+m^2)x^2+2mrx=0.$

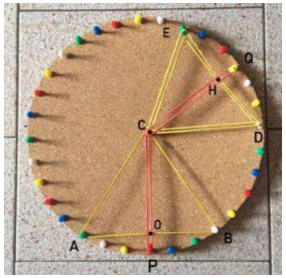
L'equazione ammette soluzione doppia se $\Delta=0$ quindi: $m^2r^2=0$ da cui $m=0.$

La retta tangente ha quindi equazione $y=r$ e risulta perpendicolare al raggio OA.

Materiale prodotto dagli studenti:
(proprietà 1)

Al termine del percorso sono state dimostrate (sia con i metodi della geometria euclidea che con quelli della geometria cartesiana) le seguenti proprietà:

fig. 1



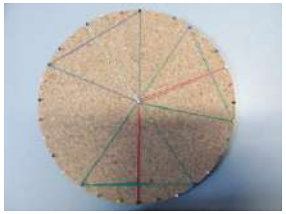
1. **“Un raggio condotto perpendicolarmente ad una corda la divide in due parti congruenti ed è bisettrice dell’angolo al centro che sottende la corda” (fig. 1).**

2. **“Un raggio che passa per il punto medio di una corda è perpendicolare alla corda stessa (e quindi è bisettrice dell’angolo al centro che sottende la corda)” (fig. 1).**

3. **“Corde congruenti di una stessa circonferenza hanno stessa distanza dal centro” (fig. 2).**

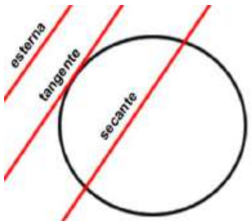
4. **“Corde di una stessa circonferenza che hanno stessa distanza dal centro sono congruenti” (fig. 2).**

fig. 2



Materiale prodotto dagli studenti:
(proprietà 2)

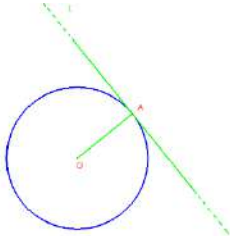
fig. 3



PROPRIETÀ:
rette tangenti, secanti, esterne (fig. 3):

Ricordando che una retta risulta tangente ad una curva se e solo se il punto di intersezione retta-curva è un punto doppio (due punti coincidenti).

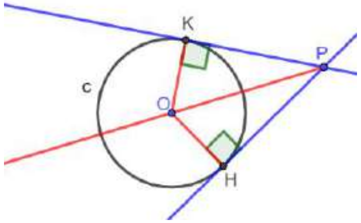
fig. 4



5. "Una retta t tangente ad una circonferenza γ di centro O in un suo punto A è perpendicolare al raggio OA" (fig. 4).

6. "Una retta t perpendicolare al raggio OA di una circonferenza γ di centro O in un suo punto A è tangente a γ" (fig. 4).

fig. 5



7. "Se da un punto P esterno ad una circonferenza si conducono le rette tangenti ad essa, i segmenti di tangente aventi ciascuno un estremo nel punto P e l'altro in comune con la circonferenza, sono congruenti" (fig. 5).

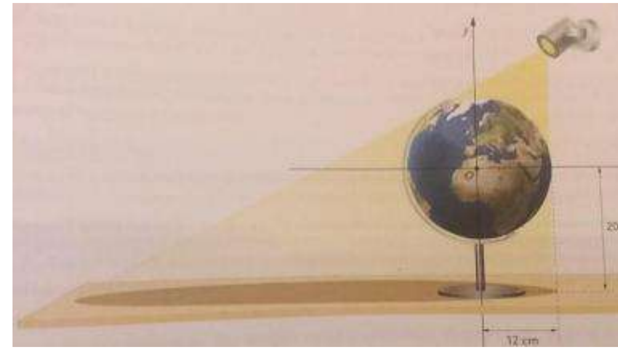
attività assegnate per casa e in classe

Le proprietà che gli studenti hanno individuato e dimostrato sono state contemporaneamente applicate agli esercizi di geometria analitica solitamente previsti nello studio delle coniche nel piano cartesiano.

Nei problemi proposti si è cercato di mantenere il contatto con situazioni reali e quindi, in molti casi, le circonferenze analizzate rappresentavano il profilo di oggetti concreti.

Di seguito viene presentata la verifica finale effettuata, ma di essa riportiamo soltanto alcuni svolgimenti dell’esercizio numero 3, dato che i primi due rappresentano problemi tradizionali nello studio della geometria analitica della circonferenza.

verifica eseguita in classe dagli studenti



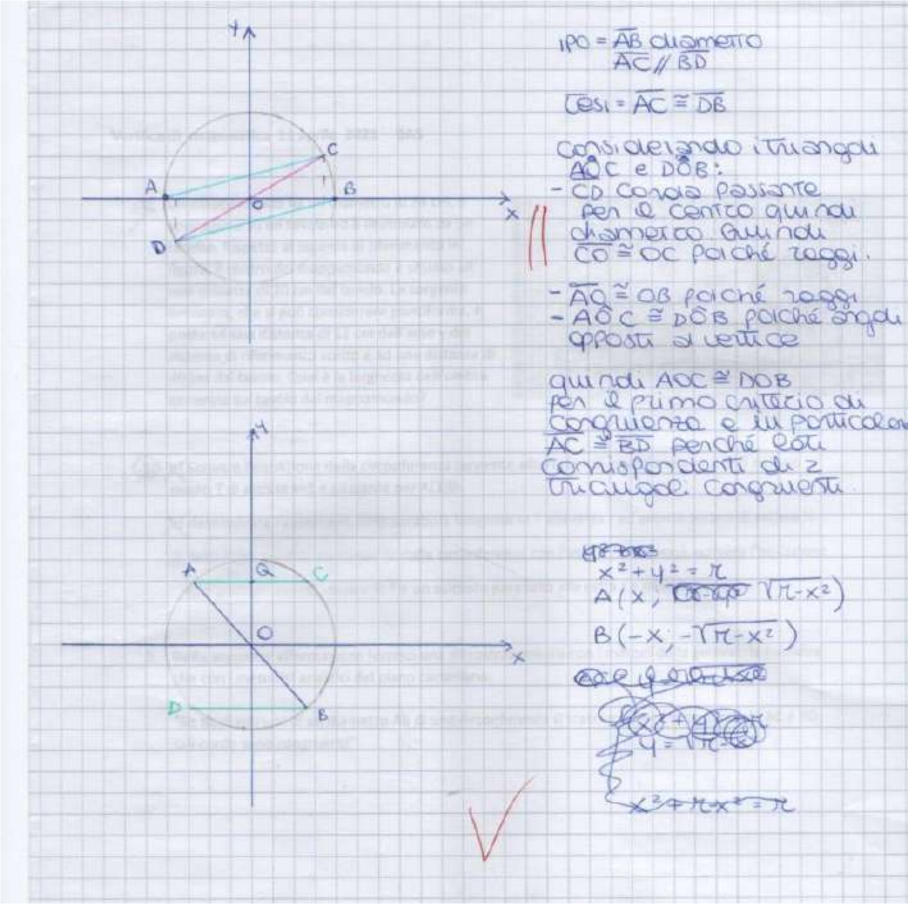
1. Un mappamondo ha un diametro di 24 cm, è appoggiato su un tavolo ed è illuminato da un faretto. Rispetto al sistema di riferimento in figura, il centro del mappamondo è situato ad una distanza di 20 cm dal tavolo. La sorgente luminosa, che si può considerare puntiforme, è posta ad una distanza di 12 cm dall'asse y del sistema di riferimento scelto e ad una distanza di 40 cm dal tavolo. Qual è la larghezza dell'ombra generata sul tavolo dal mappamondo?

2. Scrivere l'equazione della circonferenza tangente alla retta r di equazione $y = x + 3$ nel suo punto T di ascissa x=1 e passante per A(1;0). Determinare l'equazione della parabola tangente in T alla retta r ed avente vertice di ascissa ½. Detti P, Q i punti di intersezione della circonferenza con l'asse x (con $x_P<x_Q$) scrivere l'equazione dell'iperbole avente vertice in P e un asintoto parallelo alla retta r e passante per O.

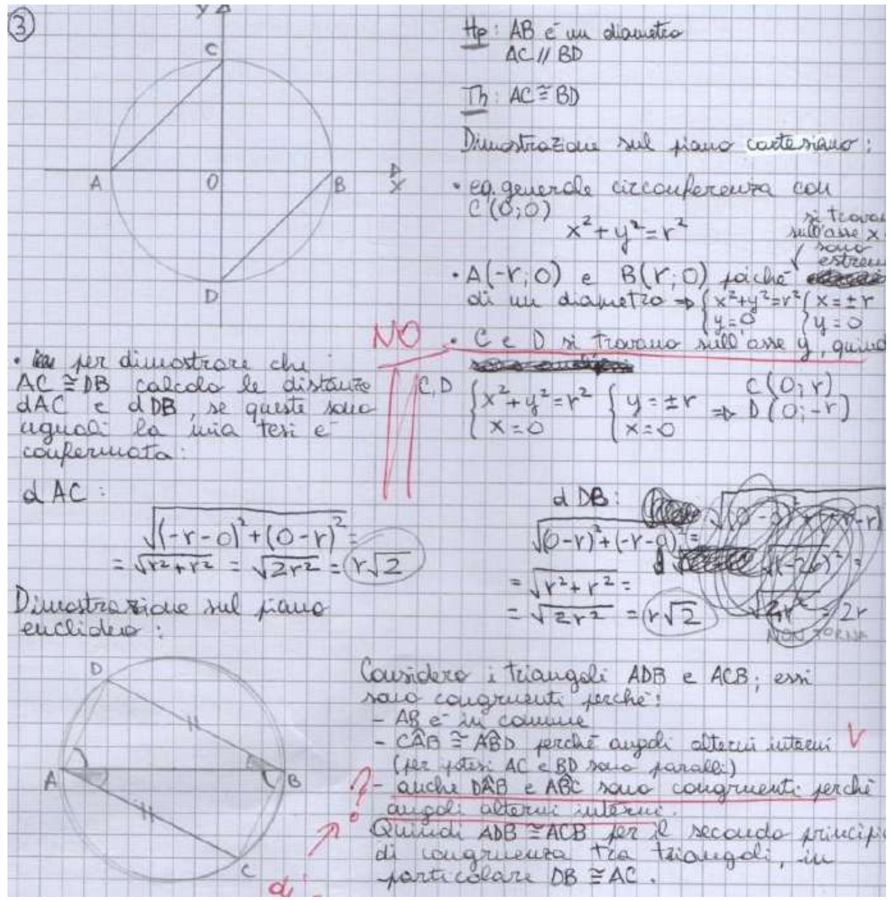
3. Della seguente affermazione fornisci una dimostrazione sia con i metodi della geometria euclidea che con i metodici analitici del piano cartesiano:
   "Se dagli estremi di un diametro AB di una circonferenza si tracciano due corde parallele AC e BD, tali corde sono congruenti»

esempio 1 di svolgimento della verifica eseguita in classe dagli studenti (esercizio n° 3)

Riportiamo alcuni svolgimenti dell’esercizio n°3 (non tutti corretti)



esempio 2 di svolgimento della verifica eseguita in classe dagli studenti (esercizio n° 3)



(3)

Hp: AB è un diametro
AC // BD

Th: AC ≅ BD

Dimostrazione sul piano cartesiano:

• eq. generale circonferenza con C(0;0)

$x^2+y^2=r^2$

• A(−r;0) e B(r;0) poiché si trovano sull'asse x, sono estremi di un diametro ⇒ $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm r \\ y=0 \end{cases}$

NO

• C e D si trovano sull'asse y, quindi

C, D $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=\pm r \\ x=0 \end{cases}$ ⇒ C(0;r) D(0;−r)

• per dimostrare che AC ≅ DB calcolo le distanze dAC e dDB, se queste sono uguali la mia tesi è confermata:

d AC:

$\sqrt{(-r-0)^2+(0-r)^2} = \sqrt{r^2+r^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$

d DB:

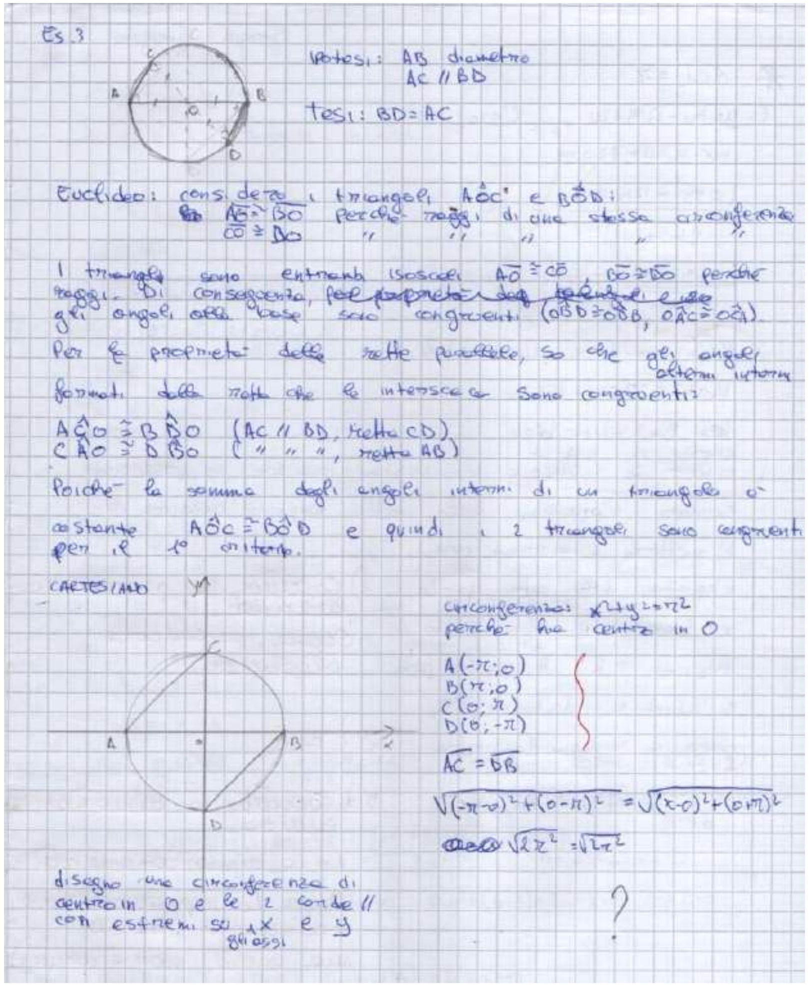
$\sqrt{(0-r)^2+(-r-0)^2} = \sqrt{r^2+r^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$

NON TORNA

Dimostrazione sul piano euclideo:

Considero i triangoli ADB e ACB; essi sono congruenti perché:
– AB è in comune
– CÂB ≅ AB̂D perché angoli alterni interni (per ipotesi AC e BD sono paralleli)
?– anche DÂB e AB̂C sono congruenti perché angoli alterni interni.
Quindi ADB ≅ ACB per il secondo principio di congruenza tra triangoli, in particolare DB ≅ AC.

esempio 3 di svolgimento della verifica eseguita in classe dagli studenti (esercizio n° 3)



Es. 3

Ipotesi: AB diametro
$AC \parallel BD$

Tesi: $BD = AC$

Euclideo: considero i triangoli $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$:
$\overline{AO} \cong \overline{BO}$ perché raggi di una stessa circonferenza
$\overline{CO} \cong \overline{DO}$ " " " " "

I triangoli sono entrambi isosceli $\overline{AO} \cong \overline{CO}$, $\overline{BO} \cong \overline{DO}$ perché raggi. Di conseguenza, ~~per proprietà dei triangoli isosceli~~ gli angoli alla base sono congruenti ($O\hat{B}D \cong O\hat{D}B$, $O\hat{A}C \cong O\hat{C}A$).

Per le proprietà delle rette parallele, so che gli angoli alterni interni formati dalla retta che le interseca sono congruenti:

$A\hat{C}O \cong B\hat{D}O$ ($AC \parallel BD$, retta CD)
$C\hat{A}O \cong D\hat{B}O$ (" " ", retta AB)

Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è costante $A\hat{O}C \cong B\hat{O}D$ e quindi i 2 triangoli sono congruenti per il 1° criterio.

CARTESIANO

disegno una circonferenza di centro in O e le 2 corde // con estremi su gli assi x e y

circonferenza: $x^2+y^2=r^2$
perché ha centro in O

$A(-r;0)$
$B(r;0)$
$C(0;r)$
$D(0;-r)$

$\overline{AC} = \overline{DB}$

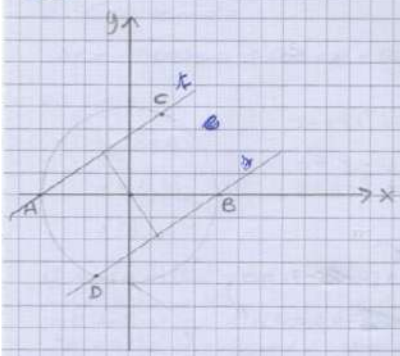
$$\sqrt{(-r-0)^2+(0-r)^2} = \sqrt{(r-0)^2+(0+r)^2}$$

$$\sqrt{2r^2} = \sqrt{2r^2}$$

?

esempio 4 di svolgimento della verifica eseguita in classe dagli studenti (esercizio n° 3)

ES 3



dimostriamo col cartesiano

in questo sistema di riferimento:

eq circonferenza $x^2+y^2=r^2$
$C(0;0)$

$A(-r;0)$ $B(r;0)$

$m_{AC}=m_{BD}=m$

s: passa da B
ed ha coefficiente angolare m

$y-0=m(x-r)$

$y=mx-rm$ $mx-y-rm=0$

t: passa da A
ed ha coefficiente angolare m

$y-0=m(x+r)$

$y=mx+rm$ $mx-y+rm=0$

visto che corde congruenti hanno stessa distanza dal centro, dovremo dimostrare che la distanza di O(0,0) dalle due rette è uguale

$Ot = Os$

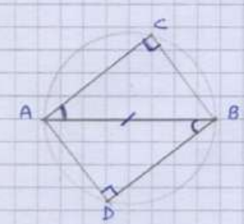
$Ot = \frac{|rm|}{\sqrt{m^2+1}}$ $Os = \frac{|-rm|}{\sqrt{m^2+1}}$

le due quantità coincidono
perché secondo il valore assoluto i due numeratori sono sempre e determinati delle stesse grandezze, mentre i denominatori sono identici quindi $AC \cong DB$

---

dimostrazione euclidea

3AS
19/04/2021



Hp	Th
AB è diametro	$AC \cong DB$
AC // BD	

considerando i triangoli ACB e ABD

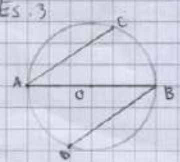
AB è in comune

$C\hat{A}B \cong A\hat{B}D$ perché angoli alterni interni delle rette parallele
AC e BD, per ipotesi
AB è diametro da ipotesi
quindi sono triangoli rettangoli perché inscritti in una semicirconferenza

quindi ~~i triangoli~~ $ACB \cong ABD$ ~~perché~~ secondo
principio di congruenza dei triangoli rettangoli
in particolare $AC \cong BD$

esempio 5 di svolgimento della verifica eseguita in classe dagli studenti (esercizio n° 3)

Es. 3



Hp: AB diametro; $AC \parallel BD$.

Ts: $AC \cong BD$.

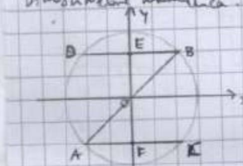
Dimostrazione euclidea:

Considero i triangoli $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$. $AO \cong OB$ e $CO \cong OD$ perché raggi; $C\hat{A}O \cong D\hat{B}O$ perché angoli alterni interni di rette parallele (AC e BD) tagliate da una trasversale (AB). $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$

sono isosceli e $C\hat{A}O$ e $D\hat{B}O$ sono angoli alla base, quindi $A\hat{C}O \cong C\hat{A}O$ e $B\hat{D}O \cong D\hat{B}O$.

Quindi $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ hanno due coppie di angoli congruenti, e dunque anche il terzo. Tutti hanno due coppie di lati congruenti, quindi sono triangoli congruenti e $AC \cong BD$.

Dimostrazione analitica:



Imposto un sistema di assi cartesiani in cui l'origine coincide con il centro della circonferenza e DB e AC sono paralleli all'asse x.*

Dato che A e B sono estremi di uno stesso diametro, essi sono simmetrici rispetto a O, quindi $x_B = -x_A$.

Posso considerare senza perdita di generalità il caso in cui B appartiene ~~alla semicirconferenza~~ al quarto di circonferenza con ordinate e ascisse positive e quindi A appartiene ~~alla semicirconferenza~~ al quarto di circonferenza con ordinate e ascisse negative.

Allora $BE = x_B$ e $AF = |-x_A| = x_B$. L'asse y è perpendicolare alle corde DB e AC; dato che passa per O, è asse di queste corde, quindi $DE = BE$ e $CF = AF$.

Quindi $DB = 2x_B$ e $AC = 2x_B$, cioè $DB \cong AC$.

* E e F sono le intersezioni di BD e AC con l'asse y.

risultati ottenuti

Quasi tutti gli studenti:

- sanno esprimere in un linguaggio corretto i concetti appresi;
- eseguono ragionamenti logici corretti;
- hanno compreso l'importanza dell'utilizzo sia del piano euclideo che di quello cartesiano e sanno operare in ciascuno di essi.

Non tutti sono però in grado di eseguire autonomamente deduzioni logiche complete in modo corretto; in particolare alcuni studenti hanno incontrato difficoltà nello sviluppo dei calcoli algebrici derivanti dalle dimostrazioni eseguite nel piano cartesiano.

Come già detto in precedenza il percorso è stato interamente svolto in DAD, ad esclusione della verifica scritta; questo non ha agevolato il superamento delle criticità incontrate, soprattutto dagli studenti più deboli.

valutazione dell'efficacia del percorso didattico sperimentato (1)

Il processo illustrato:

- ha visto lo studente protagonista attivo nella "scoperta" e nella dimostrazione delle varie proprietà, le quali non sono più "verità" custodite nei manuali scolastici, ma frutto del processo "osservare, fare, capire" che, pur richiedendo un tempo maggiore rispetto all'approccio tradizionale, ha il pregio di fortificare e consolidare conoscenze, abilità e competenze in modo più incisivo e duraturo.

  In particolare l'approccio utilizzato ha consentito agli studenti:

  - di partecipare attivamente allo sviluppo delle conoscenze e giungere a una riflessione più consapevole sulle caratteristiche geometriche degli oggetti di uso comune;
  - di lavorare sul piano cartesiano utilizzando gli strumenti della geometria analitica per interpretare problemi di geometria;
  - di utilizzare un linguaggio gradualmente più elaborato fino al livello di astrazione richiesto nelle dimostrazioni dei teoremi previsti nel programma.

valutazione dell'efficacia del percorso didattico sperimentato (2)

Il processo illustrato:

- ha permesso di lavorare contemporaneamente sul piano euclideo e su quello cartesiano in modo da:
  - avere una visione unitaria nella trattazione degli "oggetti geometrici";
  - economizzare i tempi di lavoro;
  - apprezzare il valore delle dimostrazioni euclidee che sono risultate talvolta più immediate rispetto a quelle cartesiane.

valutazione dell’efficacia del percorso didattico sperimentato (3)

L’atteggiamento degli studenti, la loro partecipazione allo sviluppo delle conoscenze e del linguaggio via via più elaborato, la qualità media degli apprendimenti ci hanno confortato in questa impostazione: le attività proposte hanno spesso sollecitato la curiosità degli studenti e hanno permesso un approccio più agevole alle definizioni e ai teoremi tipici della trattazione e di raggiungere gli obiettivi prefissati con un coinvolgimento più motivato.